

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y , $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n , $(e^x)^n = e^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$.

1. a) Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b) Calculer u_1 . En déduire u_0 .

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Liban

EXERCICE 1

Partie A :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$. En particulier, $e^x \neq 0$ et on peut donc écrire $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $(e^x)^n = e^{nx}$.

- Pour $n = 0$, $(e^x)^0 = 1$ et $e^{0x} = e^0 = 1$. Donc $(e^x)^0 = e^{0x}$ et l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $(e^x)^n = e^{nx}$. Alors

$$(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ et pour tout entier naturel } n, (e^x)^n = e^{nx}.}$$

Partie B

1. a) Pour tout entier naturel n , la fonction $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ est continue sur $[0, 1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0, 1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Donc, pour tout entier naturel n , u_n existe.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 1 dx = (1-0) \times 1 = 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 + u_1 = 1.}$$

b)

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 -\frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} dx = \left[-\ln(1+e^{-x}) \right]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e^0) \\ &= \ln 2 - \ln \left(1 + \frac{1}{e} \right) = \ln 2 - \ln \left(\frac{e+1}{e} \right) = \ln 2 - (\ln(e+1) - \ln e) = 1 + \ln 2 - \ln(e+1). \end{aligned}$$

Ensuite, $u_0 = 1 - u_1 = 1 - (1 + \ln 2 - \ln(e+1)) = \ln(e+1) - \ln 2$.

$$\boxed{u_0 = \ln(1+e) - \ln 2 \text{ et } u_1 = \ln 2 - \ln(1+e^{-1}).}$$

Remarque. $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = [\ln(e^x+1)]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2$.

2. Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \geq 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, u_n \geq 0.}$$

3. a) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{n}e^{-n} \right) - \left(-\frac{1}{n}e^0 \right) = \frac{1-e^{-n}}{n}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n, u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question 2, $u_{n+1} \geq 0$ et donc $u_{n+1} + u_n \geq u_n$. D'après la question précédente, on a alors $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n, u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}.}$$

4. Pour tout entier naturel non nul, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-e^{-n}) = 1$. D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.}$$