Exercice 2 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ et si, pour tout x de $[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   b. En déduire que $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$.
2. Calculer u_1.
3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.

   b. Étudier les variations de la suite (u_n).

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ telles que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Alors, pour tout réel x de $[a, b]$, $g(x) - f(x) \geqslant 0$ puis par positivité de l'intégrale, $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geqslant 0$ et enfin, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. On a ainsi montré que $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

PARTIE B

1) a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, on a $-1 \leqslant -x^2 \leqslant 0$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout réel x de $[0, 1]$, $e^{-1} \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^0$ et finalement

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } [0,1],\ \frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant 1.}$$

b) L'inégalité de la moyenne permet alors d'affirmer que $\frac{1}{e} \times (1 - 0) \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 1 \times (1 - 0)$ et donc que

$$\boxed{\frac{1}{e} \leqslant u_0 \leqslant 1.}$$

2) Pour tout réel x de $[0, 1]$, $xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}(-2x)e^{-x^2} = -\frac{1}{2}(e^{-x^2})'$ et donc

$$u_1 = \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).}$$

3) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, 1]$, on a $x^n f(x) \geqslant 0$. On en déduit que $\int_0^1 x^n f(x)\,dx \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \geqslant 0.}$$

b) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x^2}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \left(x^{n+1}e^{-x^2} - x^n e^{-x^2}\right)\,dx = \int_0^1 x^n(x-1)e^{-x^2}\,dx.$$

Maintenant, pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^n \geqslant 0$, $e^{-x^2} \geqslant 0$ et $(x - 1) \leqslant 0$ et donc $x^n(x - 1)e^{-x^2} \leqslant 0$. On en déduit par croissance de l'intégrale que $u_{n+1} - u_n \leqslant \int_0^1 0\,dx = 0$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $e^{-x^2} \leqslant e^0 = 1$ et donc, puisque $x^n \geqslant 0$, pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^n e^{-x^2} \leqslant x^n$. On en déduit par croissance de l'intégrale que

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

b) Pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

