EXERCICE 2 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

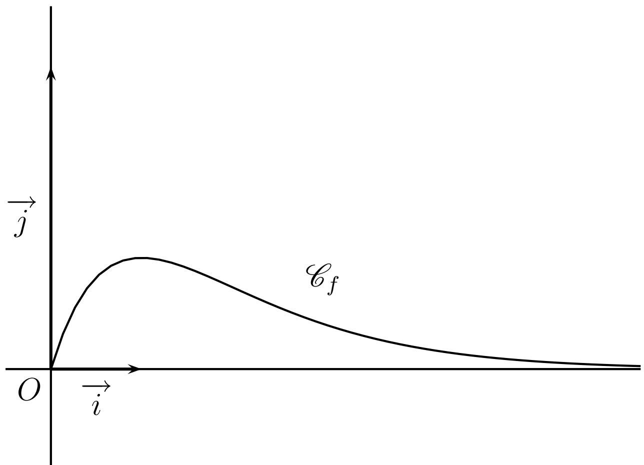
Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} \text{ et } g(x) = x^2e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Partie A

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donnée ci-dessous.



1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?

2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.

3. Tracer sur la figure jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.

4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$? Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Partie B

L'objectif de cette partie est de calculer, en unités d'aire, la mesure de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1. Colorier sur la figure cette partie du plan.

2. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Démontrer que $I = 1 - \dfrac{2}{e}$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$H(x) = -(x^2 + 2x)e^{-x}.$$

a. Calculer la dérivée H' de la fonction H.

b. En déduire une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction g.

4. Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.

EXERCICE 2

PARTIE A

1) Il semble que la fonction f soit strictement croissante sur $[0, 1]$ puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. D'autre part, il semble que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) Variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout réel positif x,

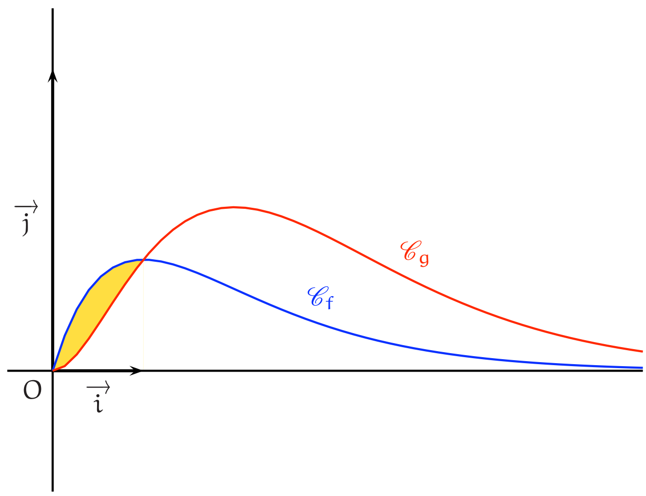
$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}.$$

Pour tout réel positif x, on a $e^{-x} > 0$. Par suite, pour tout réel positif x, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $[0, 1[$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$ puis que la fonction f est strictement croissante sur $[0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel positif x, $f(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

Les conjectures émises à la question 1) sont donc validées.

3) La calculatrice permet de construire le graphique suivant :



4) Il semble que $\mathscr{C}_f$ soit strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]0, 1[$, strictement au-dessous sur $]1, +\infty[$ et enfin il semble que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses 0 et 1. Démontrons-le.

Soit x un réel positif.

$$g(x) - f(x) = x^2e^{-x} - xe^{-x} = x(x - 1)e^{-x}.$$

Pour tout réel positif x, on a $e^{-x} > 0$. Par suite, pour tout réel positif x, $g(x) - f(x)$ est du signe de $x(x - 1)$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g(x) - f(x)$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]0, 1[$ et strictement au-dessous sur $]1, +\infty[$. Enfin, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en leurs points d'abscisses 0 et 1. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ et donc les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(0, 0)$ et $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$.

> $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]0, 1[$ et strictement au-dessous sur $]1, +\infty[$.
> Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(0, 0)$ et $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$.

PARTIE B

1) Voir graphique.

2) Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x)=x$ et $v(x)=-e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour x dans $[0,1]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x)=x & v(x)=-e^{-x} \\ u'(x)=1 & v'(x)=e^{-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left[x\times(-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 1\times(-e^{-x})\,dx = -e^{-1}+0+\int_0^1 e^{-x}\,dx \\ &= -e^{-1}+\left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1}-e^{-1}+e^0 = 1-2e^{-1} = 1-\frac{2}{e}.\end{aligned}$$

$$\boxed{I = 1-\frac{2}{e}.}$$

3) a) La fonction H est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}H'(x) &= -(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x)(-e^{-x}) = -(2x+2)e^{-x}+(x^2+2x)e^{-x} = (-2x-2+x^2+2x)e^{-x} \\ &= (x^2-2)e^{-x}.\end{aligned}$$

b) Pour $x \geqslant 0$, posons $G(x)=H(x)-2e^{-x}$. G est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$G'(x) = H'(x)+2e^{-x} = (x^2-2)e^{-x}+2e^{-x} = x^2e^{-x} = g(x).$$

Une primitive de la fonction g sur $[0,+\infty[$ est donc la fonction $G\ :\ x\mapsto H(x)-2e^{-x} = -(x^2+2x+2)e^{-x}$.

$$\boxed{\text{Une primitive de la fonction } g \text{ sur } [0,+\infty[\text{ est donc la fonction } G\ :\ x\mapsto -(x^2+2x+2)e^{-x}.}$$

4) D'après la question A.4., la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $[0,1]$. Par suite,

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = \left(1-\frac{2}{e}\right)-(G(1)-G(0)) \\ &= \left(1-\frac{2}{e}\right)-\left(-(1^2+2+2)e^{-1}+2e^0\right) = \left(1-\frac{2}{e}\right)-\left(2-\frac{5}{e}\right) = \frac{3}{e}-1.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{3}{e}-1.}$$

