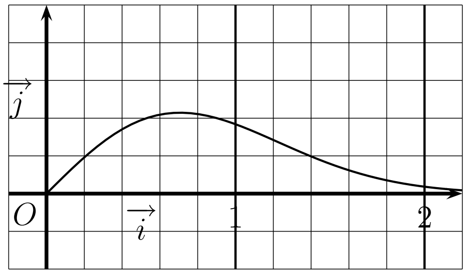
EXERCICE 1 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$).

b. Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx.$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et 1

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?

c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On se donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	$0,5$	$0,5$	$0,5$

Interprétez ces résultats.

BACCALAUREAT GENERAL

Session d'avril 2009
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Pondichéry

EXERCICE 1

Partie A

1) a. Soit x un réel non nul.

$$f(x) = xe^{-x^2} = \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

b. f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $x \in [0, +\infty[$

$$f'(x) = e^{-x^2} + x \times (-2xe^{-x^2}) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Pour tout réel positif x, on a $e^{-x^2} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe du trinôme $1 - 2x^2 = -2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ et s'annule en $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, f est croissante sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ et donc f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ce maximum est égal à

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

2) Soit $a \in [0, +\infty[$. La fonction f est continue et positive sur $[0, a]$. Donc l'aire du domaine considéré exprimée en unités d'aire est

$$F(a) = \int_0^a xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a = -\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } a,\ F(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}.}$$

$\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-a^2} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty} F(a) = \frac{1}{2}.}$$

Partie B

1. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Par suite, $[n, n+1] \subset \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

D'après la question A.1.b., la fonction f est décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ et donc sur $[n, n+1]$. On en déduit que pour tout réel x de l'intervalle $[n, n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\, dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\, dx,$$

avec $\int_n^{n+1} f(n+1)\, dx = (n+1-n)f(n+1) = f(n+1)$ et $\int_n^{n+1} f(n)\, dx = (n+1-n)f(n) = f(n)$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ f(n+1) \leq u_n \leq f(n).}$$

b. Soit $n \geq 2$. D'après la question a., on a $u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n$ et donc pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, $u_{n+1} \leq u_n$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 2} \text{ est décroissante.}}$$

c. Pour tout $n \geq 2$, on a $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$. Mais d'après la question A.1.a., $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

2. a. Soit n un entier strictement positif. D'après la relation de Chasles,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx = \int_0^n f(x)\, dx = F(n).$$

b. • On a vu à la question A.2. que pour tout entier naturel n, $F(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-n^2}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = \frac{1}{2}$. Les valeurs fournies par le tableur semblent confirmer ce dernier résultat et semblent montrer que la convergence vers $\frac{1}{2}$ est très rapide.

• Les valeurs fournies par le tableur sont comme toujours des valeurs approchées et par exemple, les valeurs exactes de $F(5)$, $F(6)$ et $F(7)$ ne sont en aucun cas $0,5$.

