EXERCICE 4

Partie A

1) Puisque la fonction f' est continue sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\ dt$ existe et

$$\int_0^1 f'(x)\ dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2e} - 0 = \frac{1}{2e}.$$

2) Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, l'axe des abscisses et la courbe (C). Ce domaine contient le rectangle $ABCD$ où B a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2e}\right)$, C a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et D a pour coordonnées $(1,0)$. L'aire de ce rectangle est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2e}$ ou encore $\frac{1}{4e}$ et donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx \geqslant \frac{1}{4e}$.

Partie B

1) Pour tout réel non nul x, on a $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \times e^{-x} = \dfrac{x}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times e^{-x} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times e^{-x}$.

Ensuite, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1$ et d'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

On en déduit que la droite 5Ox) est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

2) La fonction g est continue sur $[0,+\infty[$ en tant que polynôme et est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de trois fonctions strictement croissantes sur $[0,+\infty[$, à savoir les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x-1$.
Puisque la fonction g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on sait que pour tout réel k élément de $[g(0), \lim_{x\to+\infty} g(x)[= [-1,+\infty[$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$. En particulier, puisque $0 \in [-1,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$. On note α cette solution.
Puisque $g(0) = -1 \neq 0$, on a plus précisément $\alpha \in]0,+\infty[$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(e^{-x} + x(-e^{-x}))(x^2+1) - xe^{-x}(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{-x}((1-x)(x^2+1) - 2x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{(-x^3 - x^2 - x + 1)e^{-x}}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{g(x)e^{-x}}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout réel positif x, $-\dfrac{e^{-x}}{(x^2+1)^2} < 0$ et donc pour tout réel positif x, $f'(x)$ a le signe contraire de $g(x)$.

b) La fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et s'annule en α. Donc, si $0 \leqslant x < \alpha$, on a $g(x) < g(\alpha)$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, on a $g(x) > g(\alpha)$ ou encore $g(x) > 0$.
Puisque les fonctions f' et g sont de signes contraires sur $[0,+\infty[$, on en déduit le tableau de variations de f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f			$f(\alpha)$		
	0				0

4) a) Soit $x \geqslant 0$. On a déjà $\dfrac{x}{x^2+1} \geqslant 0$ et d'autre part

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{2(x^2+1)} = \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)} \geqslant 0,$$

et donc $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}.}$$

b) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[n,2n]$ on a $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et donc, puisque pour tout réel x de $[n,2n]$, $e^{-x} > 0$, on en déduit que

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [n,2n],\ 0 \leqslant \frac{xe^{-x}}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Par positivité et croissance de l'intégrale, on obtient alors $0 \leqslant \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,dx \leq \int_n^{2n} \frac{1}{2}e^{-x}\,dx$ avec

$$\int_n^{2n} \frac{1}{2}e^{-x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_n^{2n} = \frac{1}{2}(e^{-n}-e^{-2n}).$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}(e^{-n}-e^{-2n}).}$$

c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}(e^{-n}-e^{-2n}) = 0$. Mais alors, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

