Exercice 4 (4 points)

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt.$$

1 . a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

b) Étudier les variations de la suite (x_n).

c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2 . a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite (x_n).

3 . a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul , $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

4 . On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,y_n$.

EXERCICE 4

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ et donc $[0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Mais alors, pour tout réel $t \in [0, 1]$, $t^n \cos t \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $x_n \geq 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est positive.}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt - \int_0^1 t^n \cos t \, dt = \int_0^1 (t^{n+1} \cos t - t^n \cos t) \, dt = \int_0^1 (t-1)t^n \cos t \, dt.$$

Or, pour tout réel $t \in [0, 1]$, $t - 1 \leq 0$ et $t^n \cos t \geq 0$ et donc pour tout réel $t \in [0, 1]$, $(t - 1)t^n \cos t \leq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $x_{n+1} - x_n \leq 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $x_{n+1} \leq x_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t de $[0, 1]$, on a $t^n \geq 0$ et $\cos t \leq 1$. On en déduit que pour tout réel t de $[0, 1]$, $t^n \cos t \leq t_n$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $x_n \leq \int_0^1 t^n \, dt$ avec

$$\int_0^1 t^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ x_n \leq \frac{1}{n+1}.}$$

b) Pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.}$$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [0, 1]$, posons $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = \sin t$. Les fonction u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{array}{cc} u(t) = t^{n+1} & v(t) = \sin t \\ u'(t) = (n+1)t^n & v'(t) = \cos t \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \int_0^1 t^{n+1} \cos t = \left[t^{n+1} \sin t \, dt\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \sin t \, dt = 1^{n+1} \sin 1 - 0^{n+1} \sin 0 - (n+1) \int_0^1 t^n \sin t \, dt \\ &= -(n+1)y_n + \sin 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin 1.}$$

b) Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{-x_{n+1} + \sin 1}{n+1}$. Or, d'après 2.b), $\lim\limits_{n\to+\infty} -x_{n+1} + \sin 1 = \sin 1$ et d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-x_{n+1} + \sin 1}{n+1} = 0$ et donc que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = 0.}$$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on a $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos 1$ et donc $nx_n = y_{n+1} - x_n + \cos 1$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = \cos 1$.
De même, d'après 3.a), pour tout entier naturel non nul n, on a $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin 1$ et donc $ny_n = -x_{n+1} - y_n + \sin 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n = \sin 1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nx_n = \cos 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} ny_n = \sin 1.}$$

