EXERCICE 2 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

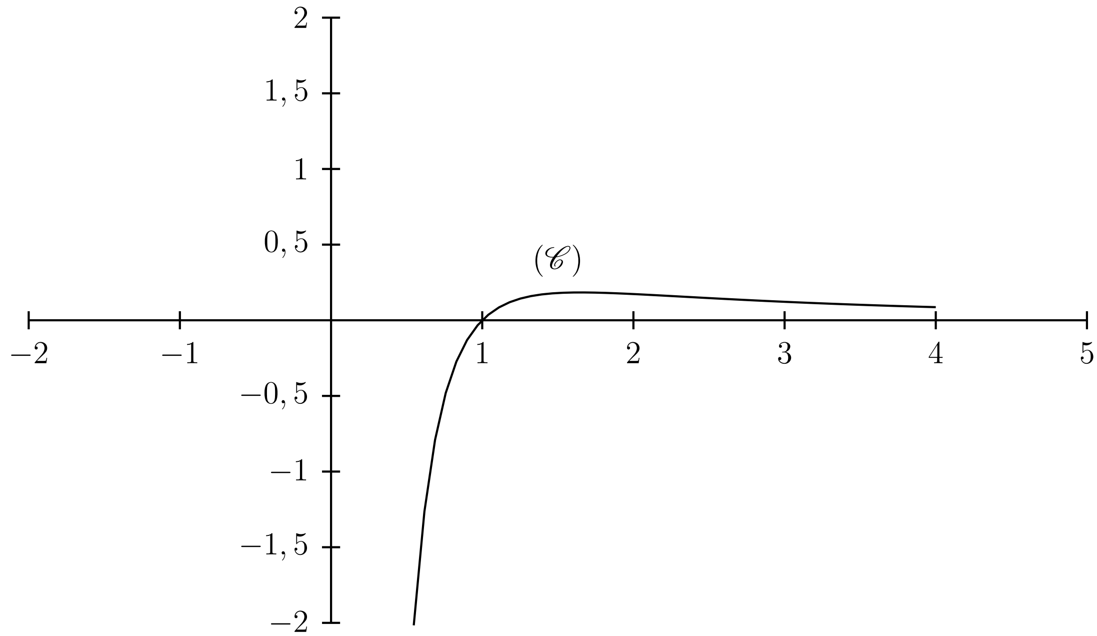
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ et par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$, construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variation sont donnés ci-après.



x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

1) Le tableau de variation de f donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que l'extremum.
Enoncer puis démontrer ces propriétés.

2) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Existe-t-il des tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui, donner leur équation.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt.$$

1) **a)** Que représente f pour la fonction g ?

b) En déduire le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$.

2) Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

3) **a)** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$g(x)=1-\frac{\ln x+1}{x}.$$

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

EXERCICE 2

Partie A

1) f est strictement croissante sur $]0, e^{1/2}]$ et strictement décroissante sur $[e^{1/2}, +\infty[$, admet un extremum égal à $f\left(e^{1/2}\right) = \dfrac{1}{2e}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Démontrons ces résultats.

• Dérivée de f

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

• Signe de f'

Pour tout réel $x > 0$, on a $x^3 > 0$. Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow -2\ln(x) > -1 \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x < e^{1/2} \text{ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}\text{)}, \end{aligned}$$

et de même $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{1/2}$. On retrouve donc le fait que la fonction f est strictement croissante sur $]0, e^{1/2}]$ et strictement décroissante sur $[e^{1/2}, +\infty[$.

• Calcul de l'extremum

$$f\left(e^{1/2}\right) = \frac{\ln\left(e^{1/2}\right)}{\left(e^{1/2}\right)^2} = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}.$$

• Limite de f en 0

On sait que que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ et d'autre part $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) \times \frac{1}{x^2} = -\infty.$$

• Limite de f en $+\infty$

Un théorème de croissances comparées donne directement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

2) Soit x_0 un réel strictement positif.
Une équation de la tangente (T_{x_0}) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ou encore

$$y = \frac{1 - 2\ln(x_0)}{x_0^3}(x - x_0) + \frac{\ln(x_0)}{x_0^2} \text{ ou enfin } y = \frac{1 - 2\ln(x_0)}{x_0^3}x + \frac{3\ln(x_0) - 1}{x_0^2}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} O \in (T_{x_0}) &\Leftrightarrow 0 = \frac{1 - 2\ln(x_0)}{x_0^3} \times 0 + \frac{3\ln(x_0) - 1}{x_0^2} \Leftrightarrow \frac{3\ln(x_0) - 1}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow 3\ln(x_0) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x_0) = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow x_0 = e^{1/3}. \end{aligned}$$

Quand $x_0 = e^{1/3}$, une équation de (T_{x_0}) est

$$y = \frac{1 - 2\ln\left(e^{1/3}\right)}{\left(e^{1/3}\right)^3}x + \frac{3\ln\left(e^{1/3}\right) - 1}{\left(e^{1/3}\right)^2} = \frac{1 - \dfrac{2}{3}}{e}x + 0 = \frac{x}{3e}.$$

$\boxed{(\mathscr{C}) \text{ admet une et une seule tangente passant par } O \text{ : la tangente au point d'abscisse } e^{1/3} \text{ d'équation } y = \dfrac{x}{3e}.}$

Partie B

1) a) La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$. On sait alors que g est la primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 et donc f est la dérivée de g.

b) La fonction g est donc dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$g'(x)=f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Etudions le signe de la fonction g'. Pour tout réel $x>0$, on a $x^2>0$. On en déduit que pour tout réel $x>0$, $g'(x)$ est du signe de $\ln(x)$ et donc la fonction g' est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$. Mais alors

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur }]0,1] \text{ et strictement décroissante sur } [1,+\infty[.}$$

2) • La fonction f est continue et positive sur $[1,3]$ (car du signe de $\ln(x)$ sur $[1,3]$). Donc $g(3)=\displaystyle\int_1^3 f(t)\,dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équation $x=1$ et $x=3$, la courbe de f et l'axe des abscisses.

• La fonction f est continue et négative sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ et d'autre part, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_1^{1/2} f(t)\,dt=-\int_{1/2}^1 f(t)\,dt$. Donc de nouveau $g\left(\frac{1}{2}\right)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équation $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$, la courbe de f et l'axe des abscisses.

3) a) Soit $x>1$. Les deux fonctions $u\,:\,t\mapsto\ln(t)$ et $v\,:\,t\mapsto-\dfrac{1}{t}$ sont définies et dérivables sur le segment $[1,x]$ et pour tout réel t de $[1,x]$, $u'(t)=\dfrac{1}{t}$ et $v'(t)=\dfrac{1}{t^2}$. De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur le segment $[1,x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et en posant

$$\begin{array}{ll} u(t)=\ln(t) & v(t)=-\dfrac{1}{t} \\ u'(t)=\dfrac{1}{t} & v'(x)=\dfrac{1}{t^2} \end{array}$$

on obtient

$$\begin{aligned} g(x)&=\int_1^x\frac{\ln(t)}{t^2}\,dt=\left[\ln(t)\times\left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^x-\int_1^x\frac{1}{t}\times\left(-\frac{1}{t}\right)\,dt=-\frac{\ln(x)}{x}+\frac{\ln(1)}{1}+\int_1^x\frac{1}{t^2}\,dt\\ &=-\frac{\ln(x)}{x}+\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x=-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}+1=1-\frac{\ln(x)+1}{x}. \end{aligned}$$

Si $x\in]0,1]$, on écrit $g(x)=-\displaystyle\int_x^1\frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$, les calculs sont alors identiques et aboutissent après deux changements de signe au même résultat.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x>0,\ g(x)=1-\frac{\ln(x)+1}{x}.}$$

Remarque. Il est plus simple de vérifier directement que la fonction $x\mapsto 1-\dfrac{\ln(x)+1}{x}$ admet pour dérivée f et prend la valeur 0 en 1.

b) D'après un théorème de croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ et d'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}\right)=1$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=1.}$$

