EXERCICE 4 (7 points)

Partie A

Restitution organisée de connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b u(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ et si, pour tout x de $[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative C ainsi que la droite D d'équation $y=x$ sont données en annexe dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est croissante et positive sur $[0,+\infty[$.
2. a) Montrer que la courbe C admet pour asymptote la droite D.

   b) Étudier la position de C par rapport à D.
3. Soit I l'intégrale définie par : $\mathrm{I}=\int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 [f(x)-x]\mathrm{d}x$. On ne cherchera pas à calculer I.

   a) Donner une interprétation géométrique de I.

   b) Montrer que pour tout réel $t\geqslant 0$, on a $\ln(1+t)\leqslant t$.

   (On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t)=\ln(1+t)-t$)

   On admettra que pour tout réel $t\geqslant 0$, on a $\frac{t}{t+1}\leqslant \ln(1+t)$.

   c) En déduire que pour tout x de $[0,+\infty[$, on a : $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

   d) Montrer que $\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right)\leqslant \mathrm{I}\leqslant 1-\mathrm{e}^{-1}$.

   e) En déduire un encadrement de I d'amplitude $0,4$ par deux nombres décimaux.
4. On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à C et D.

On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à 0,5 mm.

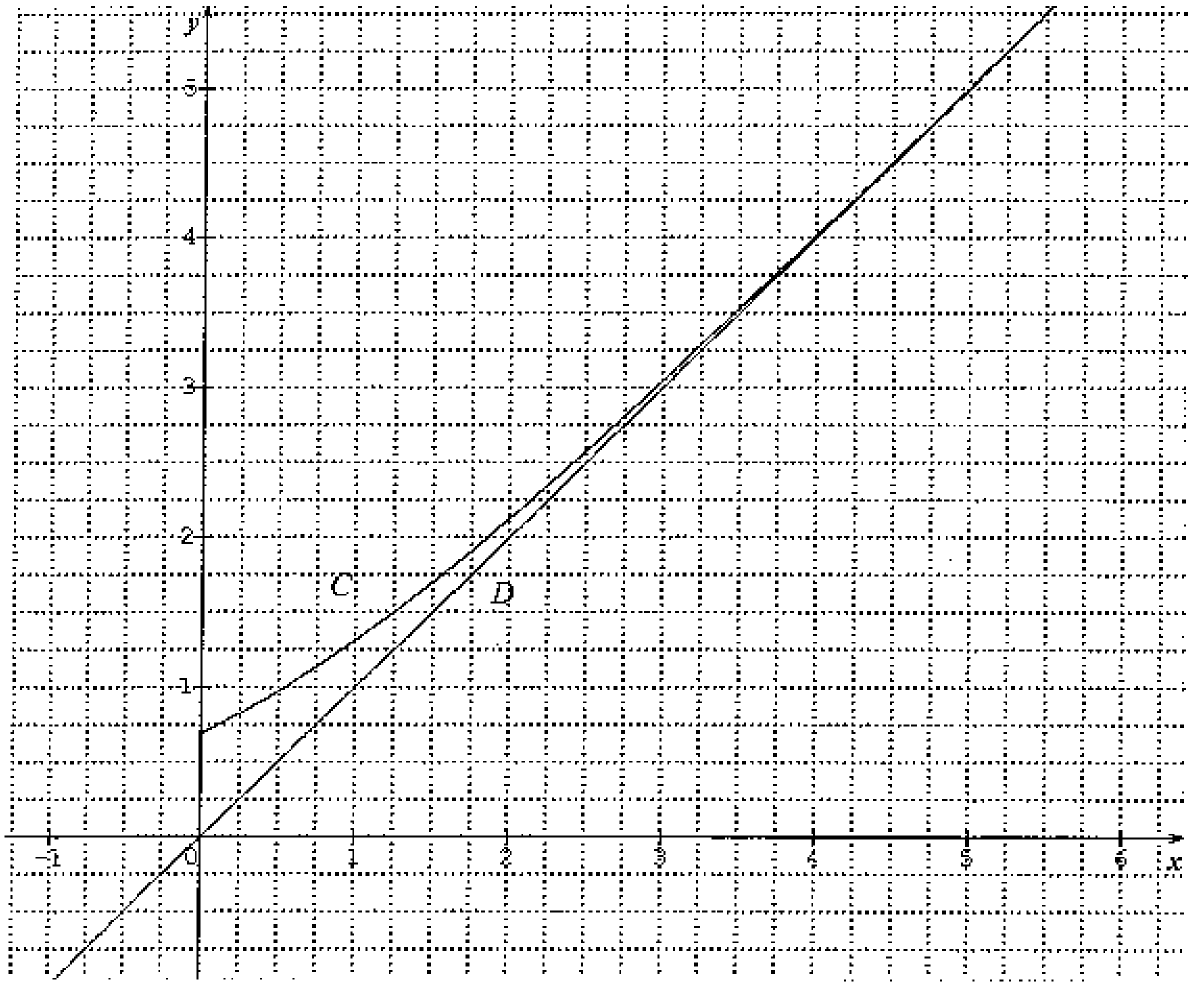
Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie

EXERCICE 4



EXERCICE 4

Partie A Restitution organisée de connaissances.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.
Alors, la fonction $g - f$ est positive sur $[a, b]$ et par positivité de l'intégrale (premier pré-requis de l'énoncé), on a $\displaystyle\int_a^b (g(x) - f(x))\ dx \geq 0$. Par linéarité de l'intégrale (deuxième pré-requis de l'énoncé), on en déduit que $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \geq 0$ puis que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$.

Partie B

1. Pour tout réel $x \geq 0$, on a $e^{-x} > 0$ et donc $1 + e^{-x} > 1 > 0$. On en déduit que la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et de plus pour $x \geq 0$

$$f'(x) = 1 + \frac{(e^{-x})'}{1 + e^{-x}} = 1 + \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 + e^{-x} - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Mais alors f' est positive sur $[0, +\infty[$ et donc f est croissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, pour $x \geq 0$, on a $f(x) \geq f(0)$ avec $f(0) = 0 + \ln(1 + e^0) = \ln 2$ et donc $f(0) > 0$. f est donc positive sur $[0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est croissante et positive sur } [0, +\infty[.}$$

2. a) Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-x} = 1$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \ln 1 = 0$. On a montré que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la courbe } C \text{ admet la droite } D \text{ pour asymptote en } +\infty.}$$

b) Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$. Or, pour tout réel $x \geq 0$, on a $1 + e^{-x} > 1$. Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que pour tout réel $x \geq 0$, $\ln(1 + e^{-x}) > 0$ et donc que pour tout réel $x \geq 0$ $f(x) - x > 0$.

$$\boxed{\text{La courbe } C \text{ est strictement au-dessus de la droite } D \text{ sur } [0, +\infty[.}$$

3. a) Puisque la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est strictement positive sur $[0, 1]$, le nombre I est l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$, la droite D et la courbe C, exprimée en unités d'aire (voir graphique page suivante).

b) Pour $t \in [0, +\infty[$, posons $g(t) = \ln(1 + t) - t$. g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $t \geq 0$,

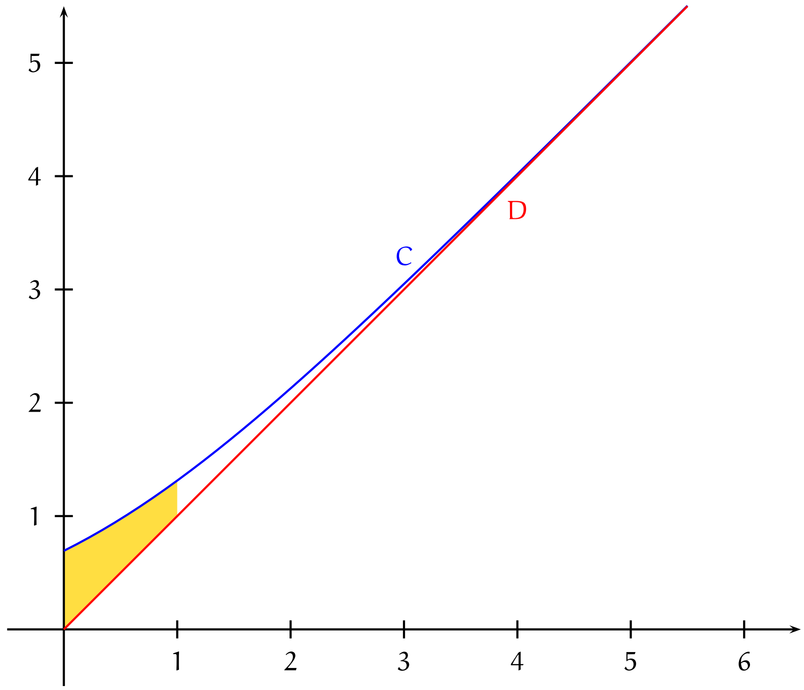
$$g'(t) = \frac{1}{1 + t} - 1 = -\frac{t}{1 + t}.$$

Maintenant, pour tout réel positif t, on a $-\dfrac{t}{1 + t} \leq 0$ et donc g' est négative sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et en particulier que pour tout réel $t \geq 0$, $g(t) \leq g(0)$ avec $g(0) = \ln 1 - 0 = 0$. Ceci fournit pour tout réel $t \geq 0$, $\ln(1 + t) - t \leq 0$ ou encore $\ln(1 + t) \leq t$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \geq 0,\ \ln(1 + t) \leq t.}$$

c) Soit $x \in [0, +\infty[$. Posons $t = e^{-x}$. Alors $t \in [0, +\infty[$ et d'après la question précédente, on a $\dfrac{t}{1 + t} \leq \ln(1 + t) \leq t$ ce qui s'écrit encore $\dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \leq \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \geq 0,\ \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \leq \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}.}$$



d) Par croissante de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx \leq \int_0^1 \ln(1+e^{-x})\,dx \leq \int_0^1 e^{-x}\,dx.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = (-e^{-1}) - (-e^0) = 1 - e^{-1}$. D'autre part,

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\int_0^1 \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\left[\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = -(\ln(1+e^{-1}) - \ln(1+e^0)) = \ln 2 - \ln(1+e^{-1}) = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right).$$

On a montré que

$$\boxed{\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1}.}$$

e) La calculatrice fournit $\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right) = 0,37\ldots$ et $1 - e^{-1} = 0,63\ldots$.

On en déduit que $0,3 \leq \ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1} \leq 0,7$.

$$\boxed{0,3 \leq I \leq 0,7.}$$

4. Soit x un réel positif. La distance de M à N, exprimée en unités de longueur, est égale à $f(x) - x$ ou encore $\ln(1+e^{-x})$. Comme une unité de longueur est égale à 20 mm, cette distance est encore égale à $20\ln(1+e^{-x})$ mm. Maintenant

$$\begin{aligned}
20\ln(1+e^{-x}) \leq 0,5 &\Leftrightarrow \ln(1+e^{-x}) \leq 0,025 \\
&\Leftrightarrow e^{\ln(1+e^{-x})} \leq e^{0,025} \text{ (car la fonction exponentielle est croissante sur } \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow 1+e^{-x} \leq e^{0,025} \Leftrightarrow e^{-x} \leq e^{0,025} - 1 \text{ (avec } e^{0,025} - 1 > 0) \\
&\Leftrightarrow \ln(e^{-x}) \leq \ln(e^{0,025} - 1) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow -x \leq \ln(e^{0,025} - 1) \Leftrightarrow x \geq -\ln(e^{0,025} - 1).
\end{aligned}$$

$$\boxed{M \text{ et } N \text{ sont indiscernables pour } x \geq -\ln(e^{0,025} - 1) \text{ avec } -\ln(e^{0,025} - 1) = 3,6\ldots}$$

