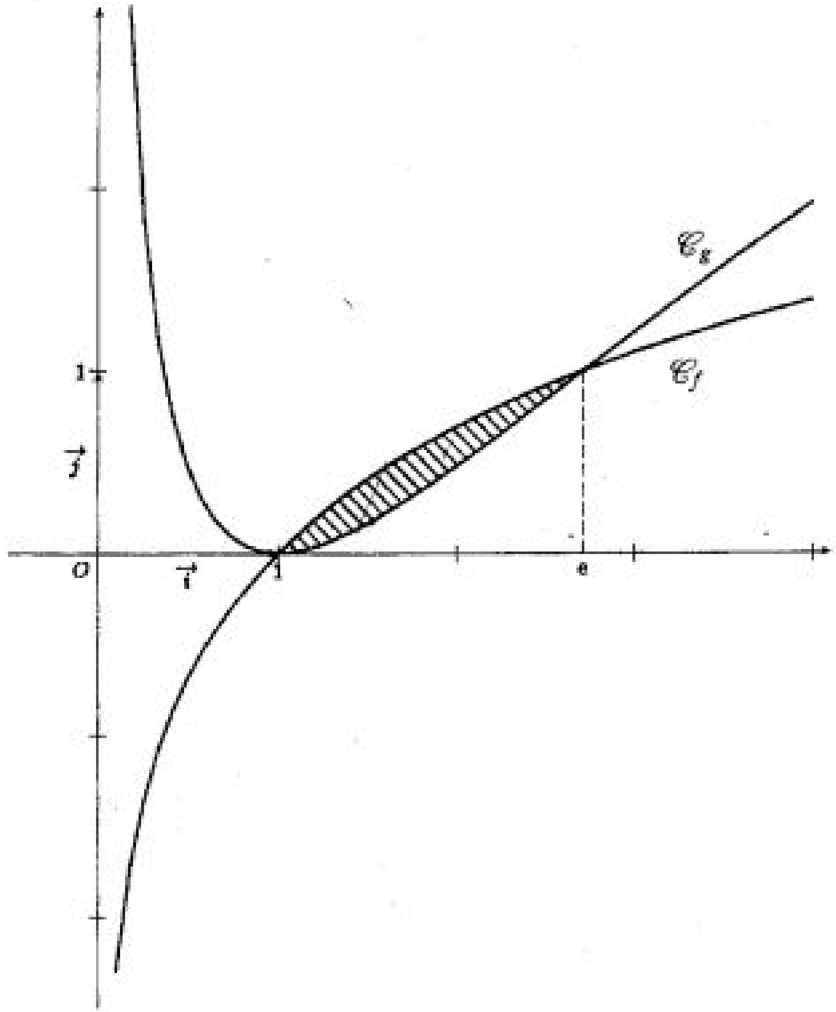
EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x$ et $g(x)=(\ln x)^2$.



1) On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I=\int_1^{e}\ln x\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_1^{e}(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J=\mathrm{e}-2I$.

c) En déduire J.

d) Donner la valeur de A.

2) *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

Pour x appartenant à l'intervalle [1 ; e], on note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ de même abscisse.

Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

France métropolitaine

EXERCICE 1

1) a) La fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

Donc, la fonction F est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$. On en déduit que

$$I = \int_1^e \ln x \, dx = F(e) - F(1) = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = e - e + 1 = 1.$$

$$\boxed{I = 1.}$$

b) Pour $x \in [1;e]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = (\ln x)^2$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1;e]$ et on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = (\ln x)^2 \\ u'(x) = 1 & v'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x. \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1;e]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e 1 \times (\ln x)^2 \, dx = \left[x \times (\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \, dx \\ &= e(\ln e)^2 - (\ln 1)^2 - 2\int_1^e \ln x \, dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= e - 2I. \end{aligned}$$

$$\boxed{J = e - 2I.}$$

c) Par suite, $J = e - 2I = e - 2 \times 1 = e - 2$.

$$\boxed{J = e - 2.}$$

d) Le graphique fourni montre que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[1;e]$. Par suite,

$$A = \int_1^e (f(x) - g(x)) \, dx = \int_1^e f(x) \, dx - \int_1^e g(x) \, dx = I - J = 1 - (e-2) = 3 - e.$$

$$\boxed{\text{L'aire } A \text{ est égale à } 3 - e \text{ unité d'aire.}}$$

2) Soit $x \in [1; e]$. Le point M a pour coordonnées $(x; \ln x)$ et le point N a pour coordonnées $(x; (\ln x)^2)$. Puisque pour $x \in [1; e]$, on a $f(x) \geq g(x)$,

$$MN = |y_N - y_M| = y_M - y_N = \ln x - (\ln x)^2.$$

Pour $x \in [1; e]$, posons $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$. h est dérivable sur $[1; e]$ et pour $x \in [1; e]$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x} = \frac{1 - 2\ln x}{x}.$$

Sur $[1; e]$, $h'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln x$. Donc, pour $x \in [1; e]$,

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{1/2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}.$$

Ainsi, la fonction h est croissante sur $[1; \sqrt{e}]$ et décroissante sur $[\sqrt{e}; e]$. On en déduit que la fonction h admet un maximum en $\sqrt{e}$. Ce maximum vaut $h(\sqrt{e})$ avec

$$h(\sqrt{e}) = \ln(e^{1/2}) - (\ln(e^{1/2}))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{MN \text{ est maximale pour } x = \sqrt{e} \text{ et la valeur maximale de } MN \text{ est } \frac{1}{4}.}$$

