EXERCICE 4 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

Partie B. Restitution organisée de connaissances

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
On prendra 4 cm pour unité graphique.

1) *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Etudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variation le plus complet possible.

2) Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

Partie C. Etude d'une famille de fonctions
Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x+1)e^{kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.
On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la **partie B**, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.

1) **a)** Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

b) Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.

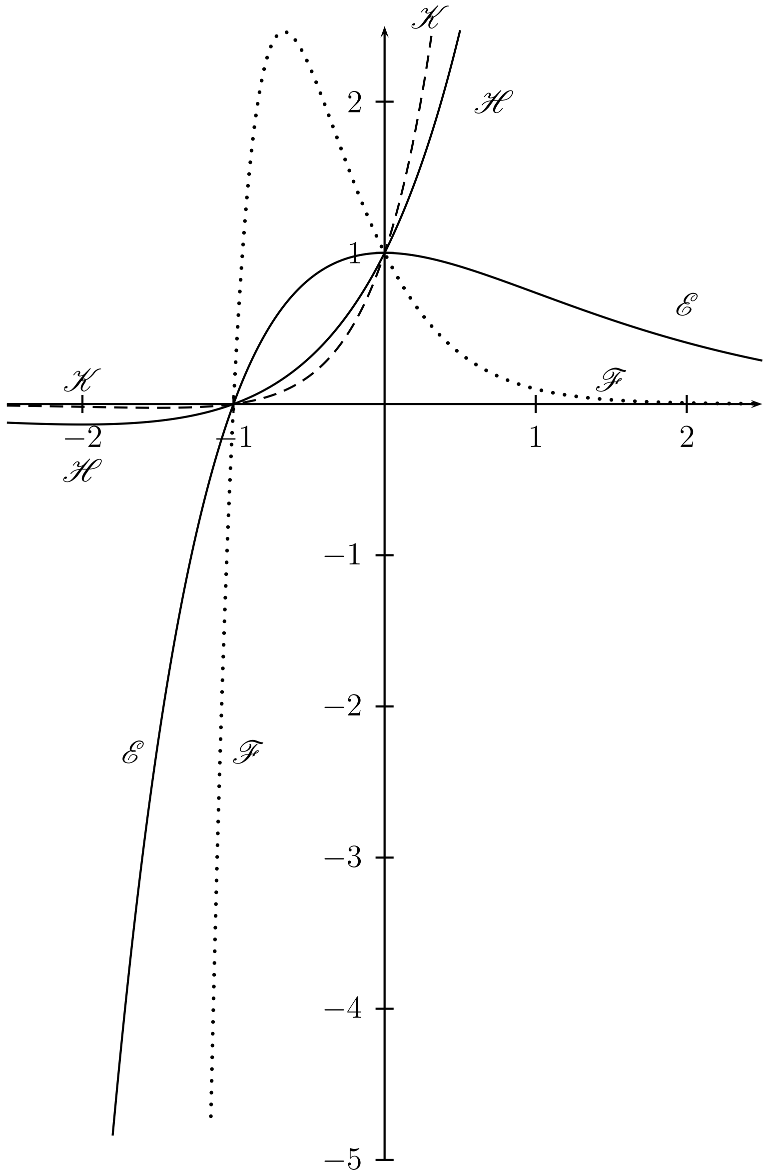
2) Etudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression :

$$(x+1)(e^x - 1).$$

En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

3) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k.
(On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

4) Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2.
Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



Partie D. Calcul d'une aire plane

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f est celle définie dans la **partie B**.

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer le nombre :

$$\mathscr{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(t)\ dt.$$

2) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat.

EXERCICE 4

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Pour tout réel non nul x, on a $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

Partie B. Etude d'une fonction

1) • Dérivée.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-1) \times e^{-x} = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = (1-x-1)e^{-x} = -xe^{-x}.$$

• Signe de f' et sens de variation de f.
Pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$. On en déduit que pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $-x$. Par suite, la fonction f' est strictement positive sur $]-\infty, 0[$, strictement négative sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

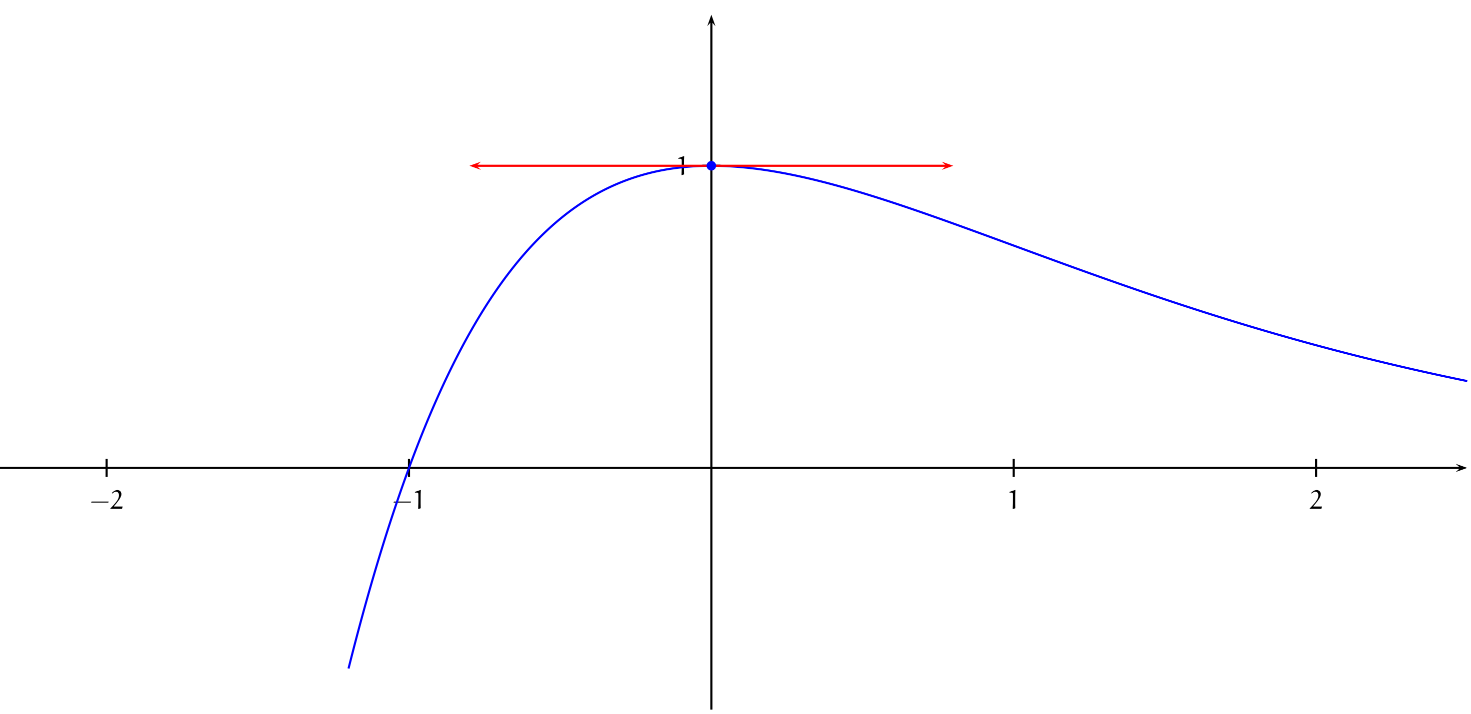
• Limite de f en $-\infty$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{-x} = -\infty$.

• Limite de f en $+\infty$.
Pour tout réel x, on a $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et d'autre part, d'après le théorème de croissances comparées rappelé dans la partie A, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} + e^{-x} = 0$.

• Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2)



 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

Partie C. Etude d'une famille de fonctions

1) a) Pour tout réel x, on a $f_0(x) = (x+1)e^0 = x+1$. f_0 est donc une fonction affine.

b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ sont les solutions de l'équation $f_0(x) = f_1(x)$. Or, pour tout réel x,

$$f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow x+1 = (x+1)e^x \Leftrightarrow (x+1)(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ ou } e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0.$$

Maintenant, $f_0(-1) = f_1(-1) = 0$ et $f_0(0) = f_1(0) = 1$. Par suite

$$\boxed{\text{Les points d'intersection de } \mathscr{C}_0 \text{ et } \mathscr{C}_1 \text{ sont les points } A(-1,0) \text{ et } B(0,1).}$$

Soit k un entier relatif. $f_k(x_A) = f_k(-1) = (-1+1)e^{-k} = 0 = y_A$ et $f_k(x_B) = f_k(0) = (0+1)e^0 = 1 = y_B$. Donc

$$\boxed{\text{Les points } A(-1,0) \text{ et } B(0,1) \text{ appartiennent à toutes les courbes } \mathscr{C}_k,\ k \in \mathbb{R}.}$$

2) Etudions le signe de $(x+1)(e^x - 1)$ dans un tableau.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(e^x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit k un entier relatif. La position relative de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$ est fournie par le signe de $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ suivant les valeurs de x. Or pour tout réel x,

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)e^{(k+1)x} - (x+1)e^{kx} = (x+1)e^{kx} \times e^x - (x+1)e^{kx} = (x+1)(e^x - 1)e^{kx}.$$

Comme pour tout réel x, on a $e^{kx} > 0$, $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ est du signe de $(x+1)(e^x - 1)$ pour tout réel x. Ce signe a été étudié plus haut et on en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout entier relatif } k,\ \mathscr{C}_{k+1} \text{ est strictement au-dessus de } \mathscr{C}_k \text{ sur }]-\infty, -1[\text{ et sur }]0, +\infty[,\\ \text{strictement au-dessous sur }]0,1[, \text{ et enfin } \mathscr{C}_k \text{ et } \mathscr{C}_{k+1} \text{ se coupent aux points } A(-1,0) \text{ et } B(0,1).\end{array}}$$

3) Soit k un entier relatif non nul. f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f_k'(x) = 1 \times e^{kx} + (x+1) \times k \times e^{kx} = (1 + k(x+1))\, e^{kx} = (kx + k + 1)e^{kx}.$$

Pour tout réel x, on a $e^{kx} > 0$. Par suite, pour tout réel x, $f_k'(x)$ est du signe de $kx + k + 1$. Le signe d'une fonction affine étant connu, on en déduit le tableau de variations de f suivant les valeurs de k :

$k < 0$

x	$-\infty$		$-(k+1)/k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
f_k		$\nearrow$	$-\dfrac{e^{-(k+1)}}{k}$	$\searrow$	

$k > 0$

x	$-\infty$		$-(k+1)/k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
f_k		$\searrow$	$-\dfrac{e^{-(k+1)}}{k}$	$\nearrow$	

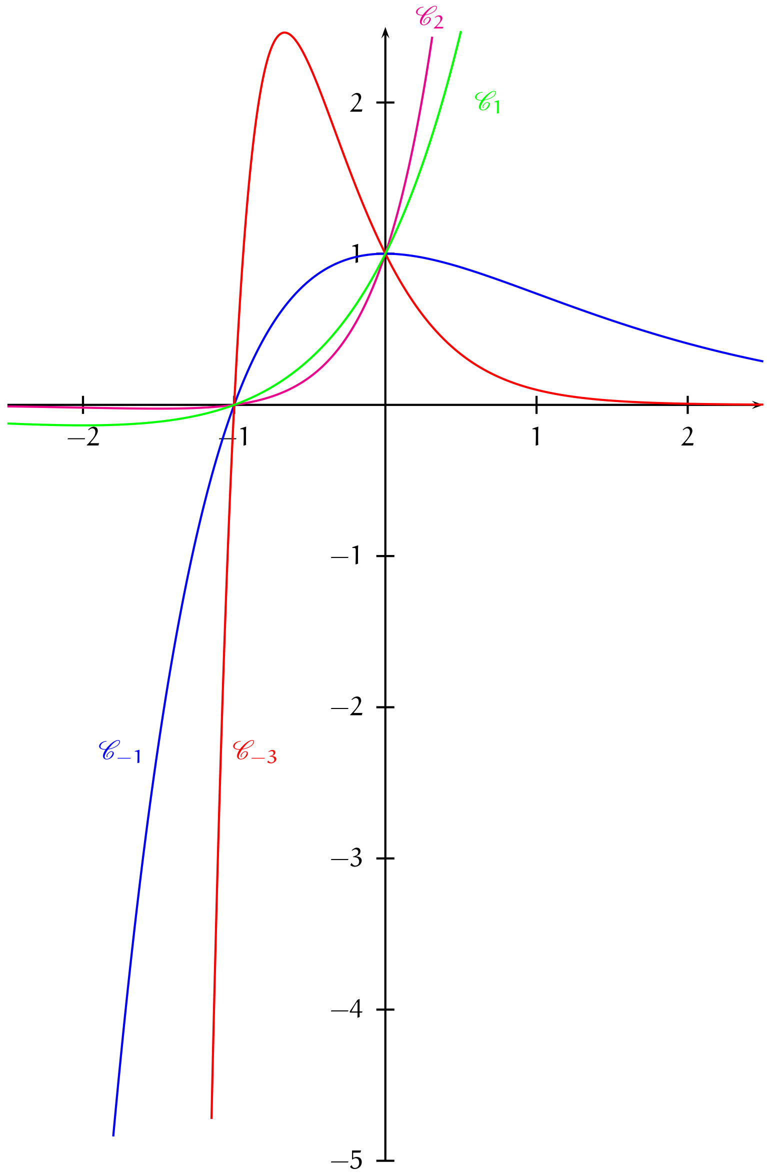
$$f\left(-\frac{k+1}{k}\right) = \left(-\frac{k+1}{k} + 1\right) e^{k\times(-(k+1)/k} = -\frac{e^{-(k+1)}}{k}.$$

4) $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont dans le cas $k < 0$ et d'après la partie B, $\mathscr{E} = \mathscr{C}_{-1}$. Donc $\mathscr{F} = \mathscr{C}_{-3}$.
Ensuite, $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_1$ sur $]0, +\infty[$ et donc $\mathscr{K} = \mathscr{C}_2$ et $\mathscr{H} = \mathscr{C}_1$.

$$\boxed{\mathscr{E} = \mathscr{C}_{-1},\ \mathscr{F} = \mathscr{C}_{-3},\ \mathscr{H} = \mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{K} = \mathscr{C}_2.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

Graphique.



 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.

Partie D. Calcul d'une aire plane

1) Soit $\lambda > 0$ Les deux fonctions $u : x \mapsto x+1$ et $v : x \mapsto -e^{-x}$ sont définies et dérivables sur le segment $[0, \lambda]$ et pour tout réel x de $[0, \lambda]$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$. De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur le segment $[0, \lambda]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et en posant

$$\begin{array}{ll} u(x) = x+1 & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\lambda} (x+1)e^{-x}\, dx &= \left[(x+1) \times (-e^{-x})\right]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} 1 \times (-e^{-x})\, dx = -(\lambda+1)e^{-\lambda} + (0+1)e^0 + \int_0^{\lambda} e^{-x}\, dx \\ &= -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 + \left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda} = -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 + (-e^{-\lambda} + 1) = 2 - (\lambda+2)e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

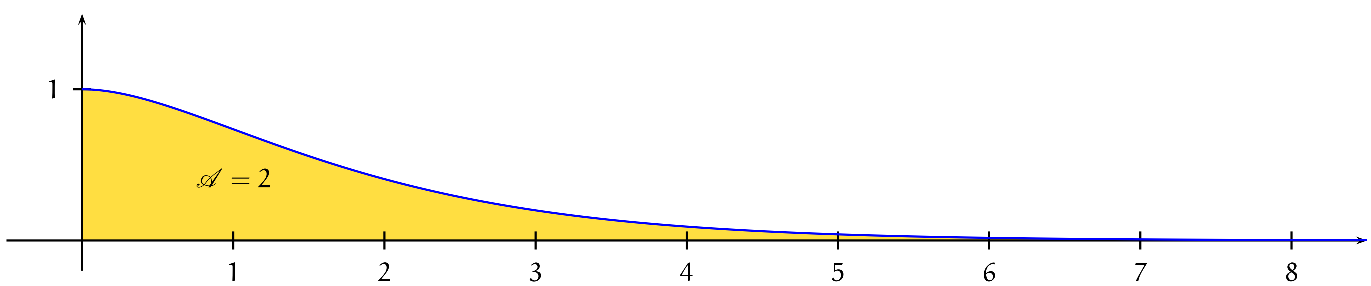
$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } \lambda, \int_0^{\lambda} f(x)\, dx = 2 - (\lambda+2)e^{-\lambda}.}$$

2) Pour tout réel λ, on a $\mathscr{A}(\lambda) = 2 - \lambda e^{-\lambda} - 2e^{-\lambda}$. Or, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda) = 2.}$$

La fonction f est continue et positive sur le segment $[0, 1]$. Donc $\mathscr{A}(\lambda)$ est l'aire du domaine du plan compris entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f, exprimée en unités d'aires.
$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$ est donc l'aire du domaine infini compris entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe représentative de f.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'aire du domaine infini compris entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe représentative de } f \\ \text{est égale à 2 unités d'aire.}\end{array}}$$



 © Jean-Louis Rouget, 2009. Tous droits réservés.