

EXERCICE 4 (7 points)

1) Restitution organisée de connaissances.

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbf{R} et est égale à sa fonction dérivée ;
- $e^0 = 1$;
- pour tout réel x , on a $e^x > x$.
- Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A, +\infty[$ où A est un réel positif.
Si pour tout x de $[A, +\infty[$ $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

- a) On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

- b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- 2) On appelle f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x e^{-\frac{x}{2}}$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe C est représentée en annexe page 6.

- a) Montrer que f est positive sur $[0, +\infty[$.

- b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour C .

- c) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0, +\infty[$.

- 3) On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- a) Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

- b) Montrer que $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}}$.

- c) Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0, +\infty[$.

- d) Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.

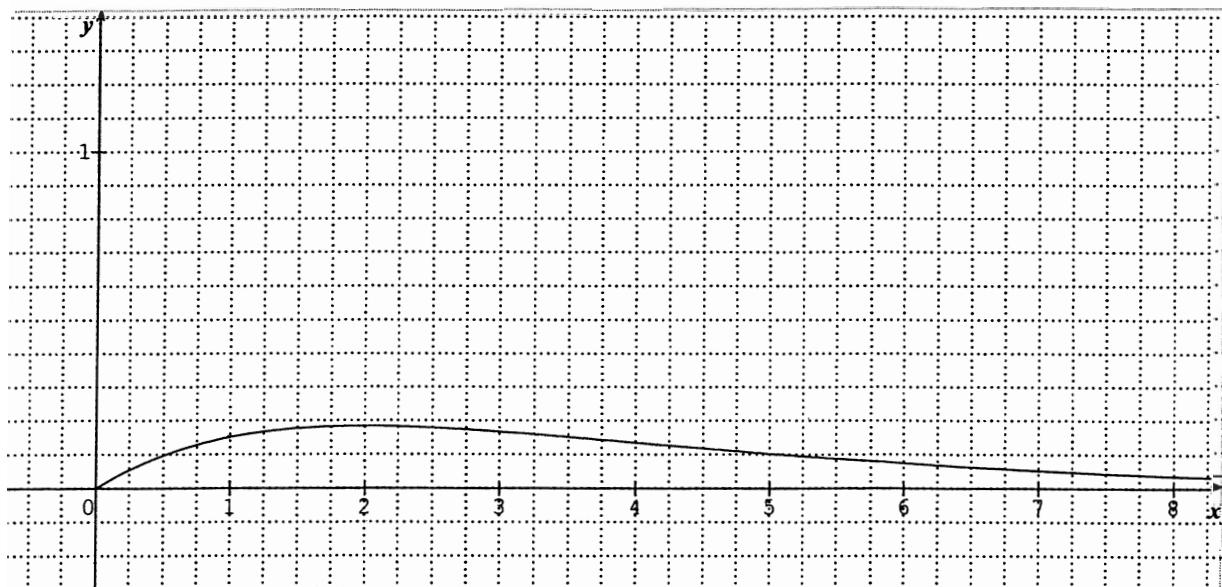
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

- 4) Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n \geq 0,5$.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie.

EXERCICE 4



EXERCICE 4

1) Restitution organisée de connaissances.

a) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \in [0, +\infty[$, $g'(x) = e^x - x$. Pour tout réel x , on a $e^x > x$ et donc la fonction g' est positive sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est croissante sur $[0, +\infty[$ et admet donc un minimum en 0 égal à $g(0)$ ou encore 1. Puisque 1 est positif, on en déduit finalement que la fonction g est positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

b) Soit $x > 0$. Puisque $g(x) \geq 0$, on a $e^x \geq \frac{x^2}{2}$ puis $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$. Maintenant, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on a montré que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

2) a) Soit $x \geq 0$. On a $\frac{1}{4}x \geq 0$ et $e^{-\frac{x}{2}} \geq 0$. Par suite, $\frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} \geq 0$. Finalement,

la fonction f est positive sur $[0, +\infty[$.

b) Pour $x \geq 0$, on a $f(x) = -\frac{1}{2}(-\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}})$ et donc d'après un théorème de croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}(-\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}xe^x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

c) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geq 0$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{4}(1 \times e^{-\frac{x}{2}} + x \times (-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}})) = \frac{1}{4}(1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}(2-x)e^{-\frac{x}{2}}.$$

Pour tout réel positif x on a $\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}} > 0$. Par suite, pour $x \geq 0$, $f'(x)$ est du signe de $2-x$.

Comme $f(2) = \frac{1}{4} \times 2e^{-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{2e}$, on en déduit le tableau de variations de la fonction f

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{1}{2e}$	0

3) a) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. Donc la fonction F est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et de plus $F' = f$. D'après la question 2)a), la fonction f est positive sur $[0, +\infty[$ et même, plus précisément, f est strictement positive sur $]0, +\infty[$. On en déduit que

la fonction F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Pour $x \geq 0$, posons $F_1(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$. F_1 est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geq 0$,

$$F'_1(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - (\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} = f(x).$$

Par suite, la fonction F_1 est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Mais alors, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = [F_1(t)]_0^x = F_1(x) - F_1(0) = F_1(x) - (1 - e^0) = F_1(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}.$$

Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et d'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$. Donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

d) F est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $[F(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)]$ c'est-à-dire l'intervalle $[0, 1[$, l'équation $F(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, +\infty[$. En particulier, l'équation $F(x) = 0,5$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, +\infty[$, solution que l'on note α .

La machine fournit $F(3,35) = 0,49\dots$ et $F(3,36) = 0,50\dots$. Comme $F(\alpha) = 0,5$, on a donc $F(3,35) < F(\alpha) < F(3,36)$. Comme F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $3,35 < \alpha < 3,36$. Finalement

$\alpha = 3,36 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par excès.}$

4) Soit n un entier naturel non nul. Puisque la fonction f est positive sur $[0, n]$, on a

$$A_n = \int_0^n f(t) dt = F(n).$$

Puisque la fonction F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$,

- si $n \leq 3$, $F(n) \leq F(3) < F(3,35) < F(\alpha) = 0,5$
- si $n \geq 4$, $F(n) \geq F(4) \geq F(3,36) \geq F(\alpha) = 0,5$.

Donc

le plus petit entier n tel que $A_n \geq 0,5$ est 4.

