EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Etudier le signe de sa dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\, dt$.

a. Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = (\ln(x+3))^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\, dx$.
Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$.
Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 3

1) • Dérivabilité et dérivée de f.

Pour tout réel x de $[0,+\infty[$, on a $x+3>0$ et donc la fonction $x \mapsto \ln(x+3)$ est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$. De plus, pour $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x+3} \times (x+3) - \ln(x+3) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ f'(x) = \frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}.}$$

• Etude du signe de f'. Pour tout réel positif x, on a $(x+3)^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x+3)$. Maintenant si x est un réel positif, alors $x+3 \geq 3 > e$ puis $\ln(x+3) > \ln e = 1$ (car la fonction $t \mapsto \ln t$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[)$ et finalement $1-\ln(x+3) < 0$.

Ainsi, la fonction f' est strictement négative sur $]0,+\infty[$.

• Limite de f en $+\infty$. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+3)}{x+3} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+3)}{x+3} = 0.}$$

• Tableau de variations de f.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$\frac{\ln 3}{3}$ $\searrow$	0

2) a. Soit n un entier naturel. Puisque f est décroissante sur $[0,+\infty[$, si x est un réel de $[0,+\infty[$ tel que $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

b. Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[n,n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx.$$

Or, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(n)\,dx = (n+1-n)\times f(n) = f(n)$ et de même $\displaystyle\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = (n+1-n)\times f(n+1) = f(n+1)$. On a donc montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ f(n+1) \leq u_n \leq f(n).}$$

c. On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite (u_n) est convergente et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

3) **a.** On a vu que la fonction $x \mapsto \ln(x+3)$ est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$. De plus pour $x \geq 0$,

$$F'(x) = 2 \times \frac{1}{x+3} \times \ln(x+3) = 2f(x).$$

b. Soit n un entier naturel. D'après la question précédente, une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ est $\frac{1}{2}F$. Par suite

$$I_n = \int_0^n f(x)\ dx = \left[\frac{1}{2}F(x)\right]_0^n = \frac{1}{2}\left(\ln^2(n+3) - \ln^2 3\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ I_n = \frac{1}{2}\left(\ln^2(n+3) - \ln^2 3\right).}$$

4) Soit n un entier naturel non nul. D'après la relation de Chasles

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^2 f(x)\ dx + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)\ dx = \int_0^n f(x)\ dx = I_n = \frac{1}{2}\left(\ln^2(n+3) - \ln^2 3\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ S_n = \frac{1}{2}\left(\ln^2(n+3) - \ln^2 3\right).}$$

Mais alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ et en particulier

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est divergente.}}$$

