EXERCICE 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

1) Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégrations par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a;b]$.

2) Soient les deux intégrales définies par $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$.

a) Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^{\pi} + 1$.

b) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

EXERCICE 2

1) Restitution organisée de connaissances
Soient u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a;b]$ dont les dérivées sont continues sur l'intervalle $[a;b]$. On sait que la fonction uv est dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ et que $(uv)' = u'v + uv'$. Maintenant, les fonctions uv' et $u'v$ sont continues sur l'intervalle $[a;b]$ en tant que produit de fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ et il en est de même de la fonction $(uv)'$. On peut donc intégrer sur l'intervalle $[a;b]$ et on obtient par linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b (uv)'(x)\ dx = \int_a^b u'(x)v(x)\ dx + \int_a^b u(x)v'(x)\ dx,$$

et donc

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = \int_a^b (uv)'(x)\ dx - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

On a démontré la formule d'intégration par parties :

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx.}$$

2) a. Effectuons une intégration par parties dans l'intégrale I en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) = e^x & v(x) = \sin(x) \\ u'(x) = e^x & v'(x) = \cos x. \end{array}$$

Donc, pour $x \in [0;\pi]$, posons $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin x$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $[0;\pi]$ et pour tout réel $x \in [0;\pi]$, $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x$. De plus les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0;\pi]$. On peut effectuer une intégration par parties et on obtient

$$I = \int_0^\pi e^x \sin x\ dx = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\ dx = e^\pi \sin\pi - e^0 \sin 0 - \int_0^\pi e^x \cos x\ dx = 0 - J = -J.$$

Mais on peut aussi poser

$$\begin{array}{ll} u(x) = -\cos x & v(x) = e^x \\ u'(x) = \sin x & v'(x) = e^x. \end{array}$$

et dans ce cas, la formule d'intégration par parties appliquée à l'intégrale I s'écrit :

$$I = [e^x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^x(-\cos x)\ dx = -e^\pi \cos\pi + e^0 \cos 0 + \int_0^\pi e^x \cos x\ dx = J + e^\pi + 1.$$

$$\boxed{I = -J \text{ et } I = J + e^\pi + 1.}$$

b. On a donc $I = -I + e^\pi + 1$ puis $2I = e^\pi + 1$ puis $I = \dfrac{e^\pi + 1}{2}$ et enfin $J = -I = -\dfrac{e^\pi + 1}{2}$.

$$\boxed{I = \frac{e^\pi + 1}{2} \text{ et } J = -\frac{e^\pi + 1}{2}.}$$

