EXERCICE 3 (5 points)

1. On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln x - \dfrac{2}{x}$

On donne ci-dessous le tableau de variation de g.

x	0	$2{,}3$	x_0	$2{,}4$	$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démontrer **toutes** les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5\ln x}{x}$

a) Démontrer que $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^{\,2}}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b) Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a.

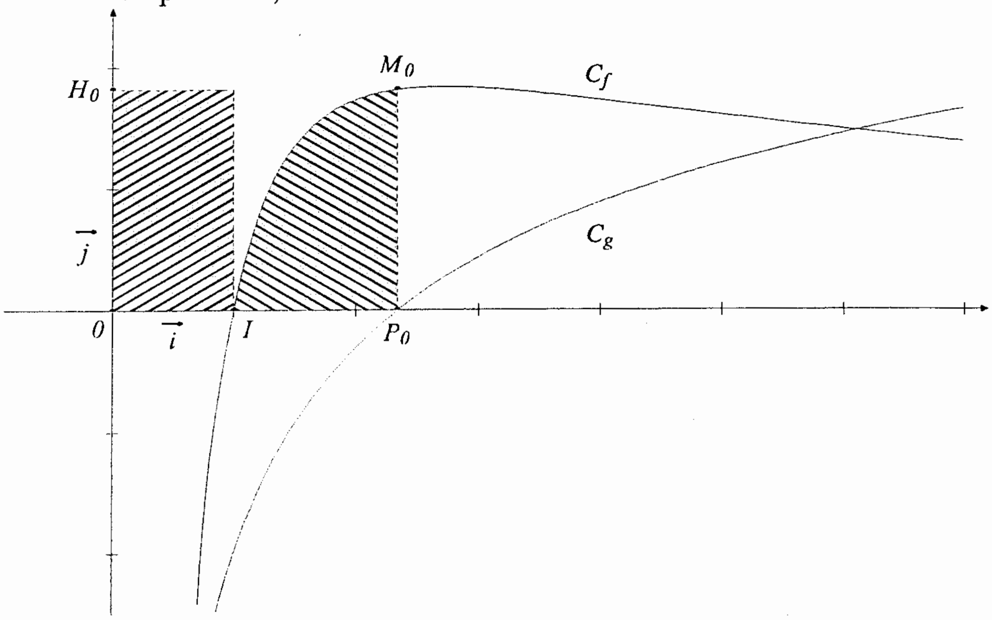
3. On a tracé dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement (C_f) et (C_g).

On appelle I le point de coordonnées $(1,0)$, P_0 le point d'intersection de (C_g) et de l'axe des abscisses, M_0 le point de (C_f) ayant même abscisse que P_0, et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme $\mathscr{D}_1$ le domaine du plan délimité par la courbe (C_f) et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$.

On nomme $\mathscr{D}_2$ le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.

Démontrer que les deux domaines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



EXERCICE 3

1. • g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour x réel strictement positif,

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2}.$$

g' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{2}{x} = -\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty.}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x} = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

• g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Donc g s'annule au plus une fois sur $]0,+\infty[$.
g est continue et strictement croissante sur $[2,3;2,4]$. De plus $g(2,3) = -0,03...$ et $g(2,4) = 0,04...$. Donc 0 appartient à l'intervalle $[g(2,3), g(2,4)]$. On en déduit que g s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[2,3;2,4]$ en un réel noté x_0. Finalement

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } g \text{ s'annule une fois et une seule sur }]0,+\infty[\text{ en un réel noté } x_0.\\ \text{De plus, } 2,3 < x_0 < 2,4.\end{array}}$$

2. **a)** L'égalité $g(x_0) = 0$ s'écrit encore $\ln(x_0) = \dfrac{2}{x_0}$. Par suite,

$$f(x_0) = \frac{5\ln x_0}{x_0} = \frac{5\dfrac{2}{x_0}}{x_0} = \frac{10}{x_0^2}.$$

$$\boxed{f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}.}$$

b) Soit a un réel strictement supérieur à 1. f est continue sur $[1,a]$ et donc $\displaystyle\int_1^a f(t)\,dt$ existe. De plus ($\dfrac{1}{t}\ln t$ est du type $u'.u$ avec $u = \ln t$ et une primitive de $u'.u$ est $\dfrac{1}{2}u^2$)

$$\int_1^a f(t)\,dt = 5\int_1^a \frac{1}{t}.\ln t\,dt = 5\left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_1^a = \frac{5}{2}\ln^2 a.$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } a \text{ strictement supérieur à } 1, \int_1^a f(t)\,dt = \frac{5}{2}\ln^2 a.}$$

3. L'abscisse du point P_0 est le réel x_0 défini en 1. Puisque f est positive sur $[1,x_0]$, l'aire $\mathscr{A}_1$ du domaine $\mathscr{D}_1$ exprimée en unités d'aire est $\int_1^{x_0} f(t)\,dt$. D'après la question 2.b), on a

$$\mathscr{A}_1 = \frac{5}{2}\ln^2 x_0 = \frac{5}{2}\left(\frac{2}{x_0}\right)^2 = \frac{10}{x_0^2}.$$

Mais d'autre part, en notant $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine $\mathscr{D}_2$ exprimée en unités d'aire, on a d'après la question 2.a),

$$\mathscr{A}_2 = 1 \times f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}.$$

Finalement

$$\boxed{\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = \frac{10}{x_0^2}.}$$

Ensuite, d'après la question 1, on a $2,3 < x_0 < 2,4$. On en déduit que $5,29 < x_0^2 < 5,76$ puis que $1,73... < \dfrac{10}{x_0^2} < 1,89...$ Finalement, on obtient un encadrement de $\mathscr{A}_1$ d'amplitude $0,2$:

$$\boxed{1,7 < \mathscr{A}_1 < 1,9.}$$

