EXERCICE 3 (7 points)

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.
Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est donnée en annexe, page 6.

1. a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

2. On pose I$=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

b) Calculer I.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\ ;1\ ]$.
On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
La suite (u_n) converge-t-elle ?

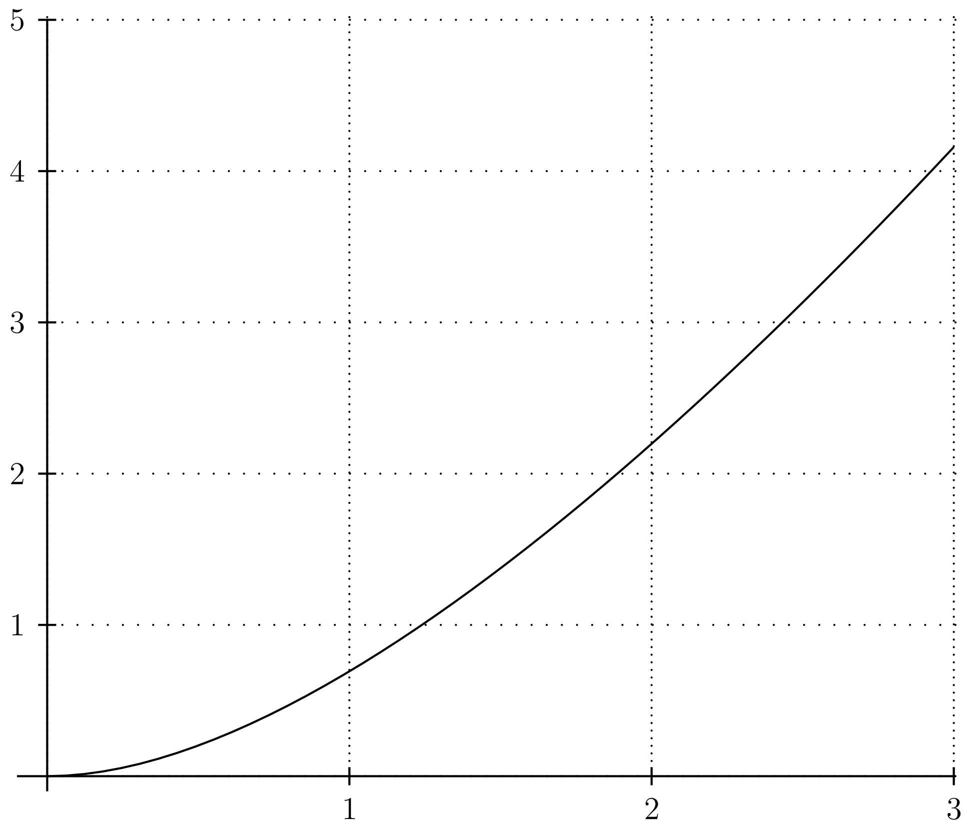
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

Annexe

EXERCICE 3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur

courbe (C)



EXERCICE 3

Partie A : étude d'une fonction

1. a) Pour tout réel x de $[0,+\infty[$, $x+1>0$. Donc f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}.$$

Pour $x>0$, on a $\ln(x+1)>0$ et $\dfrac{x}{x+1}>0$. Donc f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et f est ainsi strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b) On a $f(0)=0$ et $f'(0)=0$. Donc l'axe des abscisses est tangent à la courbe (C) au point O.

2. a) Pour tout réel x distinct de -1, on a

$$ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+(b+c)}{x+1}.$$

On choisit alors a, b et c tels que $a=1$, $a+b=0$ et $b+c=0$ c'est-à-dire $a=1$, $b=-1$ et $c=1$. On obtient

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ distinct de } -1,\ \frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}.}$$

b) La fonction proposée est continue sur $[0,1]$. Donc I existe. De plus,

$$I=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\ln(2).$$

$$\boxed{I=\ln(2)-\frac{1}{2}.}$$

3. La fonction f est continue et positive sur $[0,1]$. Donc l'aire cherchée vaut $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Pour x appartenant à $[0,1]$, posons

$$u(x)=\frac{x^2}{2}\quad\text{et}\quad v(x)=\ln(x+1).$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour tout réel x de $[0,1]$, on a

$$u'(x)=x\quad\text{et}\quad v'(x)=\frac{1}{x+1}.$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx&=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\frac{1}{x+1}\,dx\\&=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x+1}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)}\\&=\frac{1}{2}(\ln(2)-I)\\&=\frac{1}{2}\left(\ln(2)-(\ln(2)-\frac{1}{2})\right) \text{ (d'après 2. b))}\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{4}\text{ u. a.}}$$

4. f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2) = 0,6...$ ce qui montre que $0,25 \in [f(0), f(1)]$. On en déduit que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une et une seule solution sur $[0,1]$. On note α cette solution.

On demande à la calculatrice un tableau de valeurs avec un pas $h = 0,1$. On lit $f(0,5) = 0,202...$ et $f(0,6) = 0,282...$ Ainsi, $f(0,5) \leq f(\alpha) \leq f(0,6)$ et puisque f est croissante sur $[0,1]$, on en déduit $0,5 \leq \alpha \leq 0,6$.
De même, avec un pas $h = 0,01$, on lit $f(0,56) = 0,24..$ et $f(0,57) = 0,25...$ Ainsi, $f(0,56) \leq f(\alpha) \leq f(0,57)$ et on obtient un encadrement de α à 10^{-2} près :

$$\boxed{0,56 \leq \alpha \leq 0,57.}$$

Partie B : étude d'une suite

1. Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\, dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\, dx = \int_0^1 (x^{n+1} \ln(x+1) - x^n \ln(x+1))\, dx = \int_0^1 (x-1)x^n \ln(x+1)\, dx.$$

Or, pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x-1 \leq 0$, $x^n \geq 0$ et $\ln(x+1) \geq 0$. Donc pour tout réel x de $[0,1]$, $(x-1)x^n \ln(x+1) \leq 0$. On en déduit que $\int_0^1 (x-1)x^n \ln(x+1)\, dx \leq 0$ et donc que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est une suite décroissante.}}$$

D'autre part, pour tout entier naturel n et pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^n \ln(x+1) \geq 0$. Mais alors, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. On en déduit que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

2. Soit n un entier naturel.
Soit x un réel de $[0,1]$. Alors $1 \leq x+1 \leq 2$ et puisque la fonction ln est croissante sur $[0,1]$, on a $\ln 1 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$. Donc

$$0 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2).$$

On multiplie les trois membres de cet encadrement par le réel positif x^n et on a montré que :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0,1],\ 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(2).$$

Par positivité et croissance de l'intégrale on a alors

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\, dx.$$

Mais, $\int_0^1 x^n \ln(2)\, dx = \ln(2) \int_0^1 x^n\, dx = \ln(2). \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{\ln(2)}{n+1}$. Donc

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.}$$

Puisque $\dfrac{\ln(2)}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

