

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

- 1)** Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 e^{1-x}$. On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.
- a)** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$; quelle conséquence graphique peut-on en tirer?
 - b)** Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} . Déterminer sa fonction dérivée f' .
 - c)** Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe \mathcal{C} .
- 2)** Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.
- a)** Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n .
 - b)** Calculer I_1 puis I_2 .
 - c)** Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On le fera apparaître sur le graphique de la question **1c**).
- 3)** **a)** Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$.
- b)** En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

1)

a) Limite de f en $-\infty$.

- D'une part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

- D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.}$$

Limite de f en $+\infty$.

Pour tout réel x , $f(x) = e \cdot \frac{x^2}{e^x} = e \cdot \frac{1}{e^x/x^2}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x/x^2} = 0$ et finalement que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

Conséquence graphique. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} . De plus, pour tout réel x , on a

$$f'(x) = 2xe^{1-x} + x^2(-e^{1-x}) = xe^{1-x}(2-x).$$

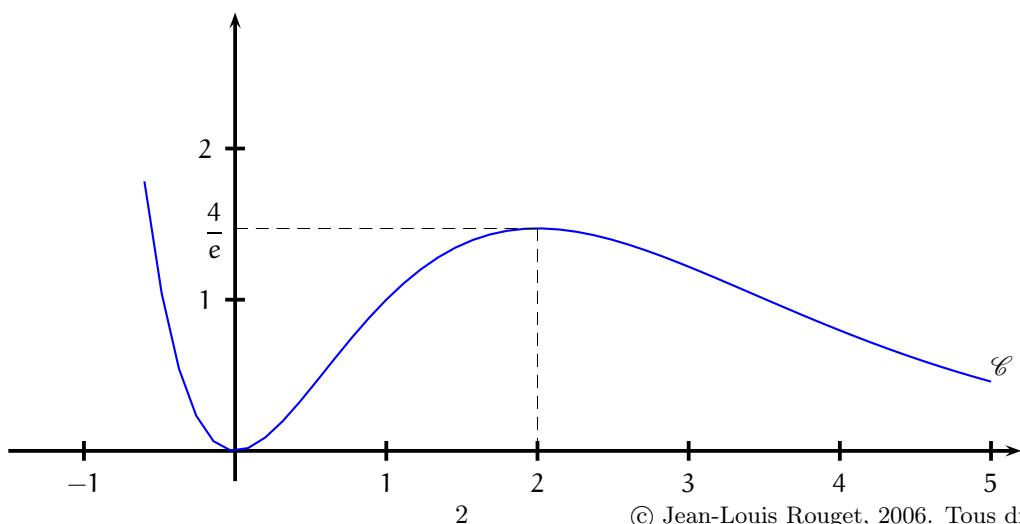
Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x, f'(x) = x(2-x)e^{1-x}.}$$

c) Pour tout réel x , on a $e^{1-x} > 0$. Donc, pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. Par suite, la fonction f' est strictement positive sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et strictement négative sur $]0, 2[$. Enfin, la fonction f' s'annule en 0 et 2.

Tableau de variation de f et graphe de f .

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
f	$+\infty$		$\frac{4}{e}$	0



2)

a) Soit n un entier naturel non nul.

Pour x élément de $[0, 1]$, posons

$$u(x) = x^{n+1} \text{ et } v(x) = -e^{1-x}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x élément de $[0, 1]$, on a

$$u'(x) = (n+1)x^n \text{ et } v'(x) = e^{1-x}.$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx \\ &= [x^{n+1}(-e^{1-x})]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-e^{1-x}) dx \\ &= -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= -1 + (n+1)I_n. \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.}$$

b) Le calcul précédent reste valable quand $n = 0$. Il fournit

$$I_1 = I_0 - 1 = -1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = -1 + [-e^{1-x}]_0^1 = -1 + (-1 + e) = e - 2.$$

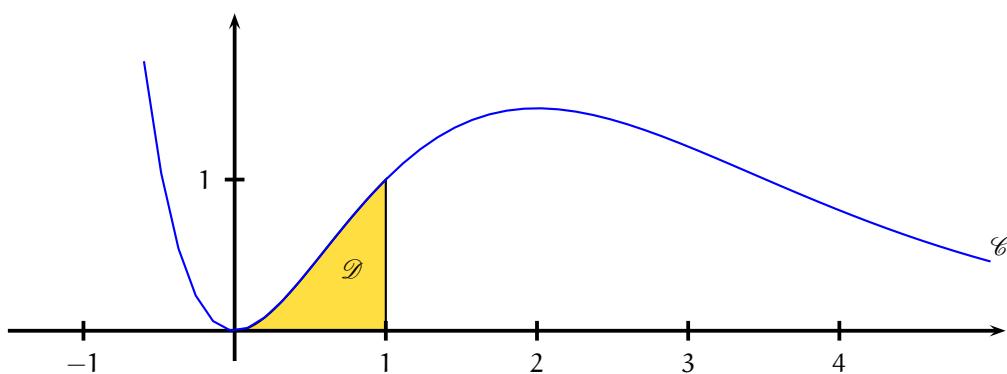
Puis,

$$I_2 = 2I_1 - 1 = 2(e - 2) - 1 = 2e - 5.$$

Donc,

$$\boxed{I_1 = e - 2 \text{ et } I_2 = 2e - 5.}$$

c) Puisque la fonction f est positive sur $[0, 1]$, le nombre I_2 est l'aire du domaine \mathcal{D} ci-dessous, exprimée en unités d'aire, l'unité d'aire valant 4 cm^2 .



3)

a) Soit n un entier naturel non nul.

Soit x un réel de $[0, 1]$. On a $1 - 1 \leq 1 - x \leq 1 - 0$ ou encore $0 \leq 1 - x \leq 1$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} , on en déduit que $e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$ ou plus simplement $1 \leq e^{1-x} \leq e$. On multiplie alors les trois membres de cet encadrement par le réel positif x^n et on obtient $x^n \leq x^n \leq e \cdot x^n$. Donc,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1], x^n \leq x^n \leq e \cdot x^n.}$$

b) Par croissance (et linéarité) de l'intégrale, on obtient alors

$$\int_0^1 x^n \, dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx \leq e \int_0^1 x^n \, dx,$$

Or, $\int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ et donc,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n, \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.}$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{e}{n+1}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.}$$