EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \text{ pour } n \geq 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geq 1.$$

1) **a)** Calculer u_2, u_3 et u_4.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad 0 \leq v_n \leq 1.$$

3) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4) Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ). Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE 2

1°) **a)** $u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. $u_3 = u_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$. $u_4 = u_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{22+3}{12} = \frac{25}{12}$.

$$\boxed{u_2 = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{11}{6} \text{ et } u_4 = \frac{25}{12}.}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

- Quand $n = 1$, on a $u_1 = 1 = \frac{1}{1} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = 1 + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

2°) **a)** Soit k un entier naturel non nul. L'intervalle $[k, k+1]$ est contenu dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1]$. On en déduit que

$$\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } [k, k+1], \text{ on a } \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale on a alors

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx.$$

Enfin $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx = \frac{1}{k+1}(k+1-k) = \frac{1}{k+1}$ et $\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx = \frac{1}{k}(k+1-k) = \frac{1}{k}$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } k,\ \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k}.}$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. D'après la question a), on a

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2} & \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx & \leq 1 \\
\frac{1}{3} & \leq \int_2^3 \frac{1}{x}\, dx & \leq \frac{1}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{n-1} & \leq \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}\, dx & \leq \frac{1}{n-2}. \\
\frac{1}{n} & \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\, dx & \leq \frac{1}{n-1}.
\end{array}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

On additionne membre à membre ces encadrements. On obtient

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\leq\int_1^2\frac{1}{x}\,dx+\int_2^3\frac{1}{x}\,dx+\ldots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\,dx\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}.$$

Le premier membre de cet encadrement s'écrit $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-1$ et vaut u_n-1. Le dernier membre de cet encadrement s'écrit $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}$ et vaut $u_n-\frac{1}{n}$. Enfin, d'après la relation de CHASLES,

$$\int_1^2\frac{1}{x}\,dx+\int_2^3\frac{1}{x}\,dx+\ldots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\,dx=\int_1^n\frac{1}{x}\,dx=\ln(n).$$

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à 2, } u_n-1\leq\ln(n)\leq u_n-\frac{1}{n}.}$$

Soit de nouveau n un entier supérieur ou égal à 2. L'encadrement précédent se réécrit successivement $u_n-1\leq\ln(n)$ et $\ln(n)\leq u_n-\frac{1}{n}$ puis $u_n-\ln(n)\leq 1$ et $\frac{1}{n}\leq u_n-\ln(n)$ ou encore $v_n\leq 1$ et $\frac{1}{n}\leq v_n$ ou enfin $\frac{1}{n}\leq v_n\leq 1$. Comme $\frac{1}{n}\geq 0$, on a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à 2, } 0\leq v_n\leq 1.}$$

On note que cet encadrement reste vrai pour $n=1$ car $v_1=1-\ln 2\in[0,1]$.

3°) **a)** Soit n un entier naturel non nul. Par définition de la suite (u_n), on a $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n+1}$ et donc

$$v_{n+1}-v_n=(u_{n+1}-u_n)-(\ln(n+1)-\ln(n))=\frac{1}{n+1}-[\ln(x)]_n^{n+1}=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul, } v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx.}$$

b) D'après la question 2°)a), si n est un entier supérieur ou égal à 1, on a $\frac{1}{n+1}\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$ et donc $\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx\leq 0$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a $v_{n+1}-v_n\leq 0$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$$

4°) D'après la question précédente la suite (v_n) est décroissante et d'après la question 2°)b) la suite (v_n) est minorée par le réel 0. On sait alors que

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge.}}$$

Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n=\ln(n)+v_n$. Or quand n tend vers $+\infty$, $\ln(n)$ tend vers $+\infty$ et v_n tend vers γ. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.