EXERCICE 3 (8 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt.$$

1) Montrer que la fonction $f \ : \ t \mapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g \ : \ t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0;1]$. En déduire la valeur de u_1.

2) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad (R).$$

Partie B

1) On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par la deuxième calculatrice
1	7,188182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,09690907075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,115648000E-02
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier ma suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt.$$

1) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.

2) **a)** Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n.$$

b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

3) Déterminer la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n).

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Etant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \text{ et pour tout entier naturel non nul } n, \; v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

1) En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

2) Etudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a. (On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.)

3) En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

EXERCICE 3

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0;1]$. De plus, pour tout réel t de $[0;1]$, on a

$$f'(t) = (-1)e^t + (2-t)e^t = (1-t)e^t = g(t).$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est une primitive de la fonction } g \text{ sur } [0;1].}$$

On en déduit que

$$u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t\ dt = \int_0^1 g(t)\ dt = [f(t)]_0^1 = \left[(2-t)e^t\right]_0^1 = (2-1)e^1 - (2-0)e^0 = e-2.$$

$$\boxed{u_1 = e-2.}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Pour $t \in [0;1]$, posons $u(t) = (1-t)^{n+1}$ et $v(t) = e^t$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$ et pour tout réel t de $[0;1]$, on a $u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$ et $v'(t) = e^t$. De plus, les deux fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_0^1 (1-t)^{n+1}e^t\ dt = \left[(1-t)^{n+1}e^t\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-(n+1)(1-t)^n\right) e^t\ dt \\
&= (1-1)^{n+1}e^1 - (1-0)^{n+1}e^0 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t\ dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= -1 + (n+1)u_n.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.}$$

Partie B

Pour la première calculatrice, il semblerait que la suite (u_n) soit décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Pour la deuxième calculatrice, il semblerait que la suite (u_n) soit tout d'abord décroissante puis croissante à partir du rang 14 et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie C

1. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel t de $[0;1]$, on a $1-t \geq 0$ et donc $(1-t)^n \geq 0$ puis $(1-t)^n e^t \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t\ dt \geq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \geq 0.}$$

2. a. Soient n un entier naturel non nul et t un réel de $[0;1]$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $e^t \leq e^1 = e$. Mais alors, puisque $(1-t)^n \geq 0$, on a $(1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$.

b. Mais alors, par croissance de l'intégrale on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 (1-t)^n e^t\ dt \\
&\leq \int_0^1 e(1-t)^n\ dt = e\int_0^1 (1-t)^n\ dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= e\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = e\left(-\frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(1-0)^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{e}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul, } 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}.}$$

3. Puisque $\frac{e}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite (u_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

Partie D

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e)$.

- Pour $n = 1$, d'après la question A.1., on a $u_1 + (1!)(a + 2 - e) = e - 2 + a + 2 - e = a = v_1$. L'égalité ci-dessus est donc vraie pour $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e)$. Alors

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= (n+1)v_n - 1 \\
&= (n+1)\left(u_n + (n!)(a + 2 - e)\right) - 1 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)u_n - 1 + (n+1).n!(a + 2 - e) \\
&= u_{n+1} + (n+1)!(a + 2 - e) \text{ (d'après la question A.2.).}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e).}$$

2. D'après la question C.3., on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. D'autre part, si $a > e-2$ alors $a+2-e > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n!)(a+2-e) = +\infty$ et si $a < e - 2$ alors $a + 2 - e < 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n!)(a + 2 - e) = -\infty$. Enfin, si $a = e - 2$, la suite v est la suite u. Donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > e - 2 \\ 0 \text{ si } a = e - 2 \\ -\infty \text{ si } a < e - 2 \end{cases}.}$$

3. La première calculatrice prend pour a une valeur approchée par défaut de $e - 2$ et différente de $e - 2$ et la deuxième prend pour a une valeur approchée par excès de $e - 2$ et différente de $e - 2$. Il est donc normal que la suite semble tendre vers $-\infty$ dans le premier cas et vers $+\infty$ dans le deuxième.

Il faut noter qu'aucune calculatrice n'est capable de fournir le bon résultat car toute calculatrice ne travaille qu'avec des valeurs approchées de $e - 2$ différentes de $e - 2$.

