EXERCICE 3 (9 points)

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0; 1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :

(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
(2) f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$;
(3) Pour tout réel x, $f(x) \leq x$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 10 cm.

I. Première partie. Etude d'un modèle.

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$g(x) = xe^{x-1}.$$

1) Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).

2) Montrer que $g(x) - x = \dfrac{x}{e}(e^x - e)$ et en déduire que g vérifie la condition (3).

3) Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère $\mathscr{R}$.

II. Seconde partie. Un calcul d'indice.

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) et (3), on définit un indice I égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1) Justifier que $I = \displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\, dx$.

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g, associé à g.

3) On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}.$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2) et (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

a) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 [x - f_n(x)]\, dx$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$. Prouver que $I_n = \dfrac{1}{2} - u_n$.

b) Comparer $\dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\dfrac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0;1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.
c) Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;1]$,

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n.$$

d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{2}{n+1}$.
e) Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 3

I. Première partie

1. $g(0) = 0 \times e^{-1} = 0$ et $g(1) = 1 \times e^0 = 1$. D'autre part la fonction g est dérivable sur $[0;1]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0;1]$ et pour tout réel x de $[0;1]$,

$$g'(x) = e^{x-1} + x \times e^{x-1} = (1+x)e^{x-1}.$$

Pour tout réel x de $[0;1]$, on a $1+x \geq 0$ et $e^{x-1} \geq 0$ et donc $g'(x) \geq 0$. Par suite, la fonction g est croissante sur $[0;1]$.

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ vérifie les conditions (1) et (2).}}$

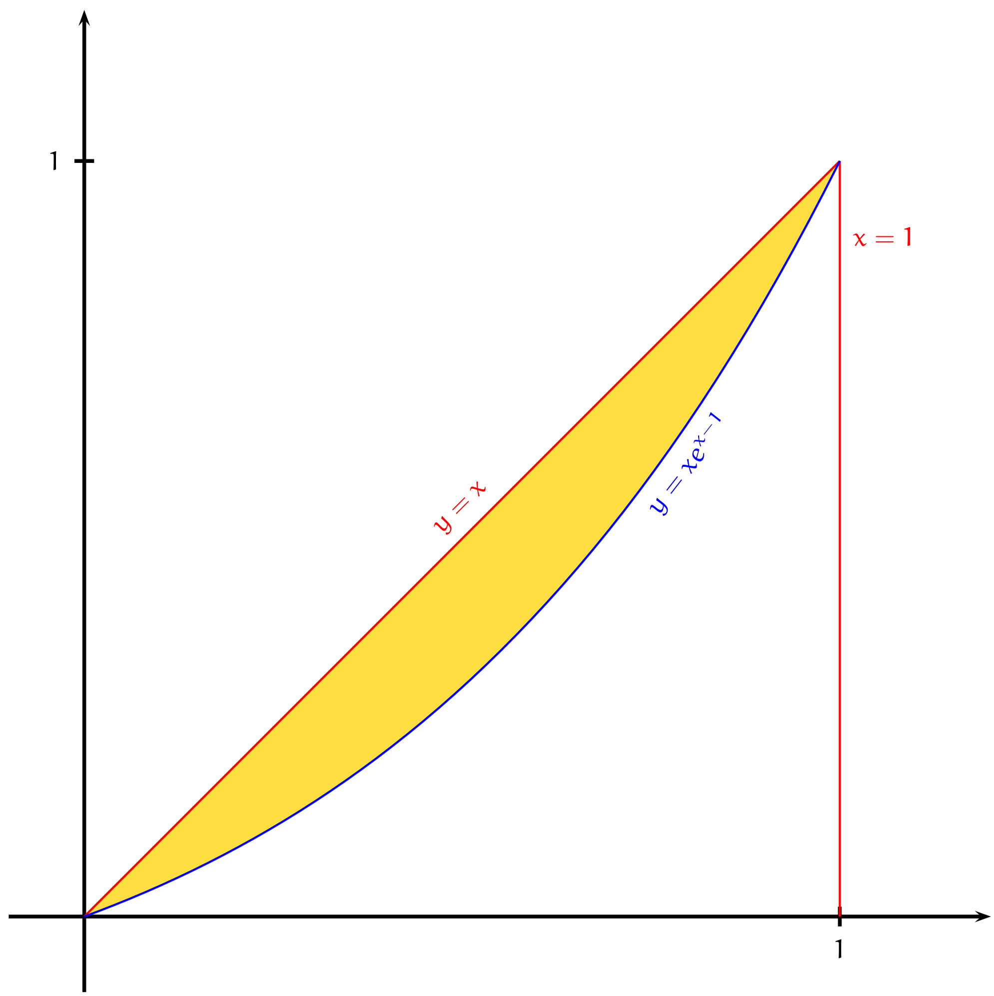
2. Soit x un réel élément de $[0;1]$.

$$g(x) - x = xe^{x-1} - x = x(e^{x-1} - 1) = x(\frac{e^x}{e} - 1) = x\frac{e^x - e}{e} = \frac{x}{e}(e^x - e).$$

Soit x un réel élément de $[0;1]$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $e^x \leq e^1$ ou encore $e^x \leq e$ et donc $e^x - e \leq 0$. D'autre part, $\frac{x}{e} \geq 0$ et finalement $\frac{x}{e}(e^x - e) \leq 0$.
Ainsi, pour tout réel x de $[0;1]$, $g(x) - x \leq 0$ ou encore $g(x) \leq x$.

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ vérifie la condition (3).}}$

3.



II. Seconde partie

1. Par hypothèse, pour tout réel x de $[0;1]$, on a $f(x) \leq x$. On sait alors que l'aire du domaine considéré, exprimée en unité d'aire, est $\int_0^1 [x - f(x)]\ dx$.

2. Calculons tout d'abord $\int_0^1 g(x)\ dx$ c'est-à-dire $\int_0^1 xe^{x-1}\ dx$.
Pour x réel élément de $[0;1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x-1}$. u et v sont dérivables sur $[0;1]$ et pour tout réel x de $[0;1]$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{x-1}$. De plus les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{x-1}\ dx &= \left[xe^{x-1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{x-1}\ dx = (1 \times e^0 - 0 \times e^{-1}) - \left[e^{x-1}\right]_0^1 \\ &= 1 - (e^0 - e^{-1}) = e^{-1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Mais alors, par linéarité de l'intégrale,

$$I_g = \int_0^1 [x - g(x)]\ dx = \int_0^1 x\ dx - \int_0^1 xe^{x-1}\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{I_g = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.}$$

3. **a.** Soit n un entier naturel. Par linéarité de l'intégrale on a

$$I_n = \int_0^1 [x - f_n(x)]\ dx = \int_0^1 x\ dx - \int_0^1 f_n(x)\ dx = \frac{1}{2} - u_n.$$

b. Soit n un entier naturel.
Soit t un réel de $[0;1]$. On a $t \leq 1$ et donc, puisque $t^n \geq 0$, on a $t^n \times t \leq t^n \times 1$ ou encore $t^{n+1} \leq t^n$. Puisque $\frac{2}{1+t} \geq 0$, on obtient finalement $\frac{2t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{2t^n}{1+t}$.

Ainsi, pour tout réel t de $[0;1]$, on a $\frac{2t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{2t^n}{1+t}$. Par croissance de l'intégrale, on a alors $\int_0^1 \frac{2t^{n+1}}{1+t}\ dt \leq \int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\ dt$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leq u_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

c. Soit n un entier naturel.
Soit t un réel élément de $[0;1]$. On a d'une part $\frac{1}{1+t} \geq 0$ et d'autre part, $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1+t}{1+t}$ ou encore $\frac{1}{1+t} \leq 1$. En résumé, $0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$. Puisque $t^n \geq 0$, après multiplication des trois membres de cet encadrement par t^n, on obtient

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n.$$

d. Pour tout réel t de $[0;1]$, on a $\frac{2t^n}{1+t} \geq 0$ et donc, par positivité de l'intégrale on a $\int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\ dt \geq 0$. Pour tout réel t de $[0;1]$, on a aussi $\frac{2t^n}{1+t} \leq 2t^n$ et donc, par croissance de l'intégrale on a $\int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\ dt \leq \int_0^1 2t^n\ dt$ avec

$$\int_0^1 2t^n\ dt = 2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}.$$

Finalement $0 \leq \int_0^1 \frac{2t^n}{1+t}\ dt \leq \frac{2}{n+1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+1}.}$$

e. Puisque $\dfrac{2}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2}.}$$

