EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et par M_0 le point de coordonnées $\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$.

On suppose connue la propriété suivante.

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d\left(M_0,\ \mathscr{P}\right)$ du point M_0 au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d\left(M_0,\ \mathscr{P}\right) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. Justifier que $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.
3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4,\ 1,\ 5)$, $(-3,\ 2,\ 0)$, $(1,\ 3,\ 6)$, $(-7,\ 0,\ 4)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathscr{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.

   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.

2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.
   On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathscr{P}$.

   c. Retrouver le résultat de la question **1. b**.

3. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre F et de rayon 6.

   a. Justifier que le point B appartient à la sphère $\mathscr{S}$.

   b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle $\mathscr{C}$, intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE 4

Partie A - Restitution organisée de connaissances

1) Puisque H est le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$ et que $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{M_0H}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Par suite,

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right| = \|\vec{n}\|\left\|\overrightarrow{M_0H}\right\| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

2) Puisque le point H appartient au plan $\mathscr{P}$, on a $ax_H+by_H+cz_H+d=0$ et donc $ax_H+by_H+cz_H=-d$ puis

$$\begin{aligned}\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} &= a(x_H-x_0)+b(y_H-y_0)+c(z_H-z_0) = -ax_0-by_0-cz_0+ax_H+by_H+cz_H\\ &= -ax_0-by_0-cz_0-d.\end{aligned}$$

3) D'après les deux questions précédentes, $|-ax_0-by_0-cz_0-d| = d(M_0,\mathscr{P})\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et, puisque

$$|-ax_0-by_0-cz_0-d| = |-(ax_0+by_0+cz_0+d)| = |ax_0+by_0+cz_0+d|,$$

on a montré que

$$\boxed{d(M_0,\mathscr{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.}$$

Partie B

1) a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-7,1-5)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-3,2,1)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$, on a d'une part $-3=-7k$ et donc $k=\dfrac{3}{7}$ et d'autre part, $2=1\times k$ et donc $k=2$. Ceci est impossible et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Par suite, les point A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$.

- $x_A+2y_A-z_A-1 = 4+2-5-1=0$.
- $x_B+2y_B-z_B-1 = -3+4-0-1=0$.
- $x_C+2y_C-z_C-1 = 1+6-6-1=0$.

Donc les points A, B et C appartiennent au plan d'équation $x+2y-z-1=0$ et puisque ces trois points définissent un unique plan, le plan $(ABC)=\mathscr{P}$ est le plan d'équation $x+2y-z-1=0$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } \mathscr{P} \text{ est } x+2y-z-1=0.}$$

b) $d = \dfrac{|x_F+2y_F-z_F-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \dfrac{|-7+0-4-1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$

$$\boxed{d=2\sqrt{6}.}$$

2) a) Δ est la droite passant par $F(-7,0,4)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(1,2,-1)$. Donc, une représentation paramétrique de Δ est

$$\left\{\begin{array}{l} x=-7+t\\ y=2t\\ z=4-t\end{array}\right., \ t\in\mathbb{R}.$$

b) Le point H est l'intersection de Δ et de $\mathscr{P}$. Soit $M(-7+t,2t,4-t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M\in\mathscr{P} \Leftrightarrow (-7+t)+2(2t)-(4-t)-1=0 \Leftrightarrow 6t-12=0 \Leftrightarrow t=2.$$

Pour $t=2$, on obtient les coordonnées du point H : $(-5,4,2)$.

$$\boxed{\text{Le point } H \text{ a pour coordonnées } (-5,4,2).}$$

c) $d(F,\mathscr{P}) = FH = \sqrt{(-5-(-7))^2+(4-0)^2+(2-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. On retrouve ainsi le résultat de la question 2)b).

3) a) $FB^2 = (x_B-x_F)^2+(y_B-y_F)^2+(z_B-z_F)^2 = (-3-(-7))^2+(2-0)^2+(0-4)^2 = 16+4+16=36$ et donc $FB=6$.

$$\boxed{\text{Le point } B \text{ appartient à } \mathscr{S}.}$$

b) On note R le rayon de $\mathscr{S}$ (donc $R=6$). Puisque $d=2\sqrt{6}=4,8\ldots$, on a $d<R$ et on sait que l'intersection de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{P}$ est un cercle $\mathscr{C}$ de rayon

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{36-24}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

Le centre de $\mathscr{C}$ est le projeté orthogonal du centre F de la sphère $\mathscr{S}$ sur le plan $\mathscr{P}$. C'est le point $H(-5,4,2)$ déterminé à la question 2)b).

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est un cercle de rayon } 2\sqrt{3} \text{ et de centre } H(-5,4,2).}$$