EXERCICE 3 (5 points)

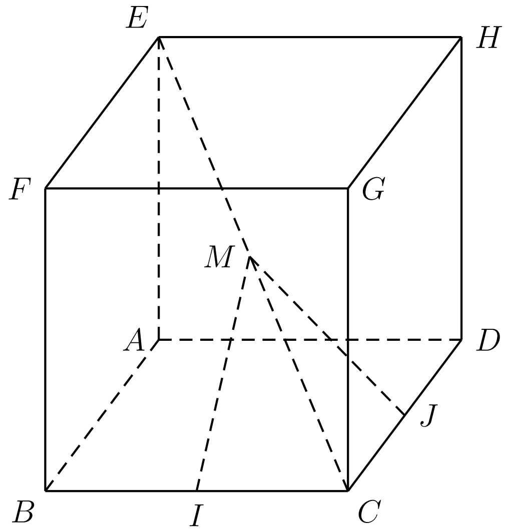
(Commun à tous les candidats)

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$.

Soit M un point quelconque du segment $[CE]$.

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1 - t; 1 - t; t)$.

2. **a.** Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment $[IJ]$.

b. En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.

c. Exprimer IM^2 en fonction de t.

3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment $[CE]$ pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale.
On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{IMJ}$.

a. En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0; \pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

b. En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.

c. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

d. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment $[EC]$ telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.

e. Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment $[EC]$.

EXERCICE 3

1) a) Dans le repère, $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a $C(1,1,0)$, $E(0,0,1)$, $I\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$.

b) Le point M est un point du segment [CE]. Donc il existe un réel t appartenant à $[0,1]$ tel que $M = \text{bar}\{C(1-t), E(t)\}$ puis

- $x_M = \dfrac{(1-t)x_C + tx_E}{t+(1-t)} = (1-t)\times 1 + t\times 0 = 1-t$,
- $y_M = \dfrac{(1-t)y_C + ty_E}{t+(1-t)} = (1-t)\times 1 + t\times 0 = 1-t$,
- $z_M = \dfrac{(1-t)z_C + tz_E}{t+(1-t)} = (1-t)\times 0 + t\times 1 = t$.

En résumé,

$$\boxed{\text{il existe un réel } t \in [0,1] \text{ tel que les coordonnées de M soient } (1-t, 1-t, t).}$$

2) a) On rappelle que $C(1,1,0)$, $E(0,0,1)$, $I\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$.

- $CI = \sqrt{(x_I-x_C)^2+(y_I-y_C)^2+(z_I-z_C)^2} = \sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+(0-0)^2} = \frac{1}{2}$.
- $CJ = \sqrt{(x_J-x_C)^2+(y_J-y_C)^2+(z_J-z_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+(1-1)^2+(0-0)^2} = \frac{1}{2}$.

Donc $CI = CJ$ et C appartient au plan médiateur du segment [IJ].

De même,

- $EI = \sqrt{(x_I-x_E)^2+(y_I-y_E)^2+(z_I-z_E)^2} = \sqrt{(1-0)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(0-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.
- $EJ = \sqrt{(x_J-x_E)^2+(y_J-y_E)^2+(z_J-z_E)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(1-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Donc $EI = EJ$ et E appartient au plan médiateur du segment [IJ].

b) Puisque les points C et E sont dans le plan médiateur, le segment [CE] tout entier est contenu dans ce plan et en particulier le point M est dans le plan médiateur du segment [IJ] ce qui signifie que $MI = MJ$ ou encore

$$\boxed{\text{le triangle MIJ est isocèle en M.}}$$

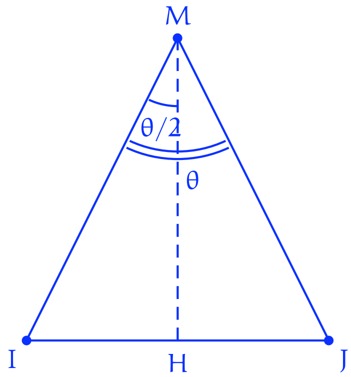
c)

$$\begin{aligned} IM^2 &= (x_M-x_I)^2+(y_M-y_I)^2+(z_M-z_I)^2 = (1-t-1)^2+\left(1-t-\frac{1}{2}\right)^2+(t-0)^2 = 2t^2+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2 \\ &= 2t^2+t^2-t+\frac{1}{4} = 3t^2-t+\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \text{ de } [0,1],\ IM^2 = 3t^2-t+\frac{1}{4}.}$$

3) a) θ est maximal si et seulement si $\frac{\theta}{2}$ est maximal. Puisque $\theta \in [0,\pi]$, $\frac{\theta}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Maintenant, la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\frac{\theta}{2}$ est maximal si et seulement si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal. En résumé, θ est maximal si et seulement si $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

b) Notons H le milieu du segment [IJ]. Puisque le triangle MIJ est isocèle en M d'après la question 2)b), la droite (MH) est aussi la hauteur issue de M du triangle MIJ. Ainsi, le triangle MHI est rectangle en H.



Dans ce triangle, on a

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\widehat{IMH}\right) = \frac{IH}{IM} = \frac{IJ}{2\ IM} = \frac{\sqrt{2}IC}{2\ IM} = \frac{\sqrt{2}}{4\ IM} = \frac{1}{2\sqrt{2}\ IM}.$$

Quand IM est minimal, $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}\ IM}$ est maximal et quand $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal, $IM = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ est minimal.

En résumé,

$$\boxed{\text{L'angle } \widehat{IMJ} \text{ est maximal si et seulement si la distance IM est minimale.}}$$

c) La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$,

$$f'(t) = 6t - 1.$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{6}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{6}, 1\right]$.

d) D'après la question 2)c), $f(t) = IM^2$. D'après la question précédente, $f(t)$ est minimal si et seulement si $t = \frac{1}{6}$ ce qui correspond à une unique position M_0 du point M sur le segment [CE].

$$\boxed{\text{Il existe une unique position } M_0 \text{ du point M sur le segment [CE] tel que } \widehat{IMJ} \text{ soit maximal.}}$$

e) Le point M_0 a pour coordonnées $\left(1 - \frac{1}{6}, 1 - \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ ou encore $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$. Par suite,

$$\overrightarrow{IM_0}.\overrightarrow{EC} = \left(\frac{5}{6} - 1\right)(1-0) + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right)(1-0) + \left(\frac{1}{6} - 0\right)(0-1) = -\frac{1}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = 0.$$

Donc le point M_0 appartient au segment [EC] et la droite (IM_0) est perpendiculaire au segment [EC] ou encore

$$\boxed{\text{le point } M_0 \text{ est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].}}$$

