EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3; -4; 1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1; -3; 1)$.
On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 + t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - t \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D'. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D', distance qui sera définie à la question **5.**
On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H' le point d'intersection des droites D' et Δ.
On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D' sont sécants en H'. Une figure est donnée en **annexe 2.**

1. On considère le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(1; 0; -1)$. Démontrer que $\vec{w}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3; 2; 3)$.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P.

b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $3x + 2y + 3z - 4 = 0$.

3. **a.** Démontrer que le point H' a pour coordonnées $(-1; 2; 1)$.

b. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. **a.** Déterminer les coordonnées du point H.

b. Calculer la longueur HH'.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M' appartenant à D', $MM' \geqslant HH'$.

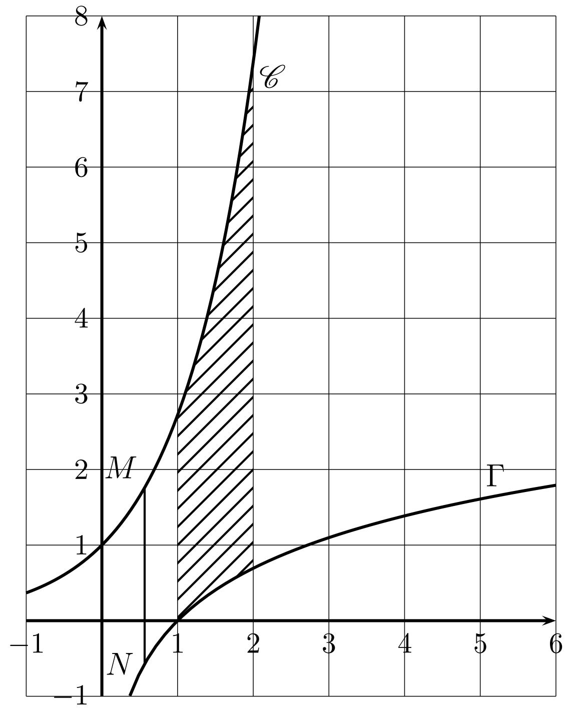
a. Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$.

b. En déduire que $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2 \geqslant \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2$ et conclure.

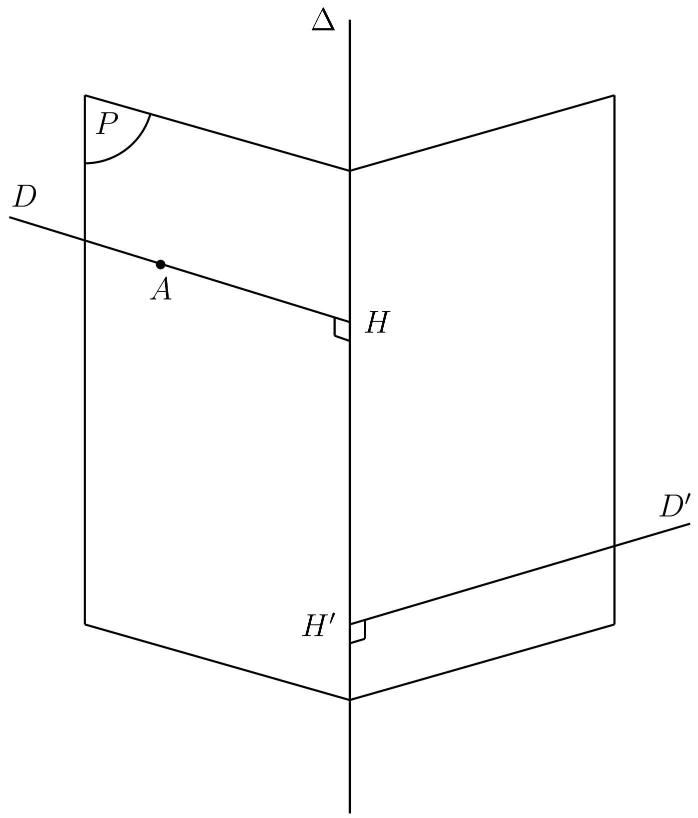
La longueur HH' réalise donc le minimum des distances entre un point de D et un point de D'. On l'appelle distance entre les droites D et D'.

FEUILLE ANNEXE

Annexe 1, exercice 2



Annexe 2, exercice 4
Commun à tous les candidats



EXERCICE 4

1) Un vecteur directeur de D' est le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(-1, 1, -1)$.
Un vecteur directeur de Δ est un vecteur orthogonal aux droites D et D' ou encore aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Or,

$$\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u} = 1 \times 1 + 0 \times (-3) + (-1) \times 1 = 1 - 1 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v} = 1 \times (-1) + 0 \times 1 + (-1) \times (-1) = -1 + 1 = 0.$$

Ainsi, $\overrightarrow{w}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ou encore

$$\boxed{\overrightarrow{w} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta.}$$

2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P. Or

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 3 \times 1 + 2 \times (-3) + 3 \times 1 = 3 - 6 + 3 = 0 \text{ et } \overrightarrow{n}.\overrightarrow{w} = 3 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0.$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan P, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P.

b) Le plan P est le plan contenant le point $A(3, -4, 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(3, 2, 3)$. Une équation cartésienne de P est donc $3(x - 3) + 2(y + 4) + 3(z - 1) = 0$ ou encore $3x + 2y + 3z - 4 = 0$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de P est } 3x + 2y + 3z - 4 = 0.}$$

3) a) H' est un point de D'. Donc il existe un réel t tel que les coordonnées de H' soient $(-1 - t, 2 + t, 1 - t)$. H' est aussi un point de Δ et donc de P. Or

$$H' \in P \Leftrightarrow 3(-1 - t) + 2(2 + t) + 3(1 - t) - 4 = 0 \Leftrightarrow -4t = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Quand $t = 0$, on obtient les coordonnées du point H' à savoir $(-1, 2, 1)$.

$$\boxed{\text{Le point } H' \text{ a pour coordonnées } (-1, 2, 1).}$$

b) Δ est la droite passant par $H'(-1, 2, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}(1, 0, -1)$. Une représentation paramétrique de Δ est donc

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

4) a) H est un point de Δ. Donc il existe un réel t tel que les coordonnées de H soient $(-1 + t, 2, 1 - t)$. Le point H est aussi sur D et donc le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AH}$ sont $(-4 + t, 6, -t)$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{u} &\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{u} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} -4 + t = k \\ 6 = -3k \\ -t = k \end{cases} \Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} k = -2 \\ -4 + t = -2 \\ -t = -2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} k = -2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.
\end{aligned}$$

Quand $t = 2$, on obtient les coordonnées du point H à savoir $(1, 2, -1)$.

$$\boxed{\text{Le point H a pour coordonnées } (1, 2, -1).}$$

b) $HH' = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$$\boxed{HH' = 2\sqrt{2}.}$$

5) a) Soient M un point de D et M' un point de D'.

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'} = \overrightarrow{HH'} + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right).$$

De plus, $\overrightarrow{HH'}$ est un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{MH}$ est un vecteur de D. Donc $\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{MH} = 0$. De même, $\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M'} = 0$ et finalement

$$\overrightarrow{HH'}.\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right) = \overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M'} = 0 + 0 = 0.$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{HH'}$.

b) Soient M un point de D et M' un point de D'.

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2 &= \left(\overrightarrow{HH'} + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right)\right)^2 = \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2 + 2\overrightarrow{HH'}.\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right) + \left\|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right\|^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right\|^2 \\ &\geqslant \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2,\end{aligned}$$

puis $MM'^2 \geqslant HH'^2$ et donc $MM' \geqslant HH'$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ de } D \text{ et tout point } M' \text{ de } D',\ MM' \geqslant HH'.}$$

