EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère :

- les points A (1, 1, 1) et B (3, 2, 0) ;
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ;
- le plan (Q) d'équation $x-y+2z+4=0$;
- la sphère (S) de centre le point A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x+y-z-8=0$.
2. Déterminer une équation de la sphère (S).
3. a) Calculer la distance du point A au plan (Q).
   En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).
   b) Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?
4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées $(0, 2, -1)$.
   a) Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.
   b) Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \\ z=4-3t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.
   c) Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D).
   d) On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).
   L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
   « Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ».
   Justifier la réponse.

EXERCICE 3

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2, 1, -1)$. Le plan (P) admet donc pour équation cartésienne $2(x-3)+(y-2)-z = 0$ ou encore $2x + y - z - 8 = 0$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (P) \text{ est } 2x + y - z - 8 = 0.}$$

2. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (S) \Leftrightarrow AM^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 3 = 0.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de la sphère } (S) \text{ est } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 3 = 0.}$$

3. a) $d(A, (Q)) = \dfrac{|x_A - y_A + 2z_A + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{|1 - 1 + 2 + 4|}{\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

Maintenant, (S) est la sphère de centre A et de rayon $AB = \sqrt{6}$. Donc le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

$$\boxed{d(A, (Q)) = \sqrt{6} \text{ et le plan } (Q) \text{ est tangent à la sphère } (S).}$$

b) $d(A, (P)) = \dfrac{|2 + 1 - 1 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} = AB$. Donc

$$\boxed{\text{le plan } (P) \text{ est tangent à la sphère } (S).}$$

4. a) Le plan (P) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}_1(2, 1, -1)$ et le plan (Q) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}_2(1, -1, 2)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (si $\overrightarrow{n}_2 = k\overrightarrow{n}_1$, alors $k = -1$ en considérant la deuxième coordonnée mais aussi $k = -2$ en considérant la troisième ce qui est impossible). Donc les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles et on sait alors que

$$\boxed{\text{les plans } (P) \text{ et } (Q) \text{ sont sécants en une droite.}}$$

b) Pour tout réel t,

$$2t + (12 - 5t) - (4 - 3t) - 8 = 2t - 5t + 3t + 12 - 4 - 8 = 0.$$

Donc tout point de (D) est dans (P) ou encore (D) est contenue dans (P). De même, pour tout réel t

$$t - (12 - 5t) + 2(4 - 3t) + 4 = t + 5t - 6t - 12 + 8 + 4 = 0.$$

Donc la droite (D) est contenue dans (Q). Finalement la droite (D) est contenue dans (P) et dans (Q) et, puisque $(P)\cap(Q)$ est une droite, $(P) \cap (Q) = (D)$.

c) Le centre d'une sphère n'appartient à aucun plan tangent. Donc A n'appartient pas à (P) ou à (Q) et finalement A n'appartient pas à (D).

d) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$MB = MC \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 \Leftrightarrow -6x + 9 = 2z + 1 \Leftrightarrow 6x + 2z - 8 = 0 \Leftrightarrow 3x + z - 4 = 0.$

Donc l'ensemble des points à égale distance des points B et C est le plan (R') d'équation $3x + z - 4 = 0$.

Maintenant, $3x_A + z_A - 4 = 3 + 1 - 4 = 0$ et pour tout réel t, $3t + (4 - 3t) - 4 = 0$. Donc le plan (R') contient le point A et la droite (D). Par suite, le plan (R') est le plan (R) et donc le plan (R) est l'ensemble des points équidistants des points B et C. L'affirmation de l'énoncé est vraie.

