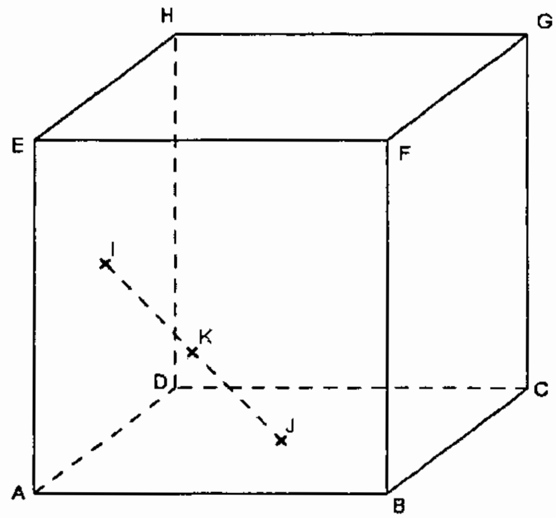
Exercice 3 (5 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.



On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment $[IJ]$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2. Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.
3. a) Démontrer que le plan médiateur du segment $[IJ]$ est le plan (AKG).

   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).

   c) Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).
4. Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G.

   Soit L le centre du carré DCGH.

   a) Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].

   b) *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que K est le barycentre des points A, D et G affectés de coefficients que l'on précisera.

EXERCICE 3

1) Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, le point D a pour coordonnées $(0,1,0)$ et le point E a pour coordonnées $(0,0,1)$.
Le point I est le centre du carré ADHE et donc le milieu de la diagonale [DE]. On en déduit que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_D + x_E}{2}, \frac{y_D + y_E}{2}, \frac{z_D + z_E}{2}\right)$ ou encore $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

De même, les points B et D ont pour coordonnées respectives $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$. Puisque le point J est le milieu du segment [BD], le point J a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Enfin, le point K est le milieu du segment [IJ] et donc le point K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$\boxed{\text{Les points I, J et K ont respectivement pour coordonnées } \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \text{ et } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).}$$

2) Le point A a pour coordonnées $(0,0,0)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
Ensuite, puisque $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AG}$, on doit avoir $1 \times k = \frac{1}{4}$ et aussi $1 \times k = \frac{1}{2}$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points A, K et G ne sont pas alignés.}}$$

Les points A, K et G définissent donc un unique plan.

3) a) Déjà le milieu K du segment [IJ] est dans le plan (AKG). Il reste à vérifier que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (AKG). Pour cela, vérifions que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ du plan (AKG).

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ et donc

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = 0,$$

et

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \times 1 + 0 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 = 0.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{Le plan (AKG) est le plan médiateur du segment [IJ].}}$$

b) Le plan (AKG) est le plan passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{IJ}$. Une équation cartésienne du plan (AKG) est donc $\frac{1}{2}(x-0) + 0(y-0) - \frac{1}{2}(z-0) = 0$ ou encore

$$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan (AKG) est } x - z = 0.}$$

c) Le point D a pour coordonnées $(0,1,0)$ et donc $x_D - z_D = 0$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{le point D appartient au plan (AKG).}}$$

4) a) Les points D et G ont respectivement pour coordonnées $(0,1,0)$ et $(1,1,1)$. Le point L est le milieu du segment [DG] et a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$. Par suite, le milieu du segment [AL] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Le milieu du segment [AL] est donc le point K.

$$\boxed{\text{Le point K est le milieu du segment [AL].}}$$

b) Le point L est le milieu du segment [DG] et donc, d'après le théorème du barycentre partiel, $K = \text{bar}(A(2), L(2)) = \text{bar}(A(2), D(1), G(1))$.

$$\boxed{K = \text{bar}(A(2), L(2)) = \text{bar}(A(2), D(1), G(1)).}$$

