EXERCICE 3 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points :
A de coordonnées $(1, 1, 0)$, B de coordonnées $(2, 0, 3)$, C de coordonnées $(0, -2, 5)$ et D de coordonnées $(1, -5, 5)$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées $(3, 3, 0)$ et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

EXERCICE 3

Proposition 1.	**Faux**
Proposition 2.	**Faux**
Proposition 3.	**Faux**
Proposition 4.	**Vrai**

Justifications.

Proposition 1. L'ensemble considéré $\mathscr{E}$ contient les points $E(0,4,0)$, $F(0,4,1)$ et $G(-2,0,0)$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}(0,0,1)$ et $\overrightarrow{EG}(-2,-4,0)$ ne sont pas colinéaires ou encore les points E, F et G ne sont pas alignés. $\mathscr{E}$ n'est pas une droite. On sait d'ailleurs plus précisément que $\mathscr{E}$ est un plan puisque $\mathscr{E}$ admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. La proposition 1 est donc fausse.

Proposition 2. Soit M un point du plan. Puisque $1+1+2=4\neq 0$, G est bien défini.
On sait alors que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ et donc

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=4\overrightarrow{MG}\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=4\overrightarrow{MG}\Leftrightarrow\overrightarrow{GM'}=3\overrightarrow{MG}\Leftrightarrow\overrightarrow{GM'}=-3\overrightarrow{GM}.$$

La transformation considérée est l'homothétie de centre G et de rapport -3. La proposition 2 est donc fausse.

Proposition 3. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1,-1,3)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-1,-3,5)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C définissent un unique plan.
Cherchons alors un vecteur normal au plan (ABC). Posons $\overrightarrow{n}(a,b,c)$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b+3c=0\\ -a-3b+5c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b-3c\\ -(b-3c)-3b+5c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2c\\ a=-c\end{cases}$$

On peut prendre $\overrightarrow{n}(-1,2,1)$.

Maintenant, les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si le point D appartient au plan ABC ce qui équivaut encore à $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{n}=0$. Or

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{n}=(1-1)\times(-1)+(-5-1)\times 2+(5-0)\times 1=-12+5=-7\neq 0.$$

Donc, les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires et la proposition 3 est fausse.

Proposition 4. Calculons la distance d du point $\Omega(3,3,0)$ au plan (P) d'équation $2x+2y+z+3=0$. On sait que

$$d=\frac{|2\times 3+2\times 3+0+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{15}{3}=5.$$

d est égal au rayon de la sphère et on sait alors que la sphère est tangente au plan (P). La proposition 4 est vraie.

