EXERCICE 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A(1,-1,3)$, $B(0,3,1)$, $C(6,-7,-1)$, $D(2,1,3)$, et $E(4,-6,2)$.

1. a) Montrer que le barycentre du système $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$ est le point E.

   b) En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21}$.

2. a) Montrer que les points A, B et D définissent un plan.

   b) Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).

   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD).

3. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

   b) Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD).

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Montrer que le plan (ABD) et l'ensemble Γ, déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

EXERCICE 3

1) a) Puisque $2-1+1=2 \neq 0$, le barycentre du système $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$ est bien défini. De plus, $\overrightarrow{EA}$ a pour coordonnées $(-3,5,1)$, $\overrightarrow{EB}$ a pour coordonnées $(-4,9,-1)$ et $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(2,-1,-3)$. On en déduit que le vecteur $2\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(2\times(-3)+4+2, 2\times 5-9-1, 2\times 1+1-3)$ ou encore $(0,0,0)$.
Ainsi, $2\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{0}$ et donc

$$\boxed{E = \text{bar}\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}.}$$

b) Soit M un point de l'espace. On sait que $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(2-1+1)\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{ME}$. Par suite,

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21} \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{ME}\right\|=2\sqrt{21} \Leftrightarrow 2ME=2\sqrt{21} \Leftrightarrow ME=\sqrt{21}.$$

$$\boxed{\Gamma \text{ est la sphère de centre } E \text{ et de rayon } \sqrt{21}.}$$

2) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-1,4,-2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(1,2,0)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$ on a nécessairement $-k=1$ et aussi $4k=2$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points A, B et D ne sont pas alignés.

$$\boxed{\text{Les points } A, B \text{ et } D \text{ définissent un plan.}}$$

b) Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(2,-1,-3)$. Or

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC}=(-1)\times 2+4\times(-1)+(-2)\times(-3)=-2-4+6=0$$

et

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EC}=1\times 2+2\times(-1)+0\times(-3)=2-2+0=0.$$

La droite (EC) est donc orthogonale aux droites (AB) et (AD). Puisque la droite (EC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABD),

$$\boxed{\text{la droite } (EC) \text{ est orthogonale au plan } (ABD).}$$

c) Le plan (ABD) est le plan passant par $A(1,-1,3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{EC}(2,-1,-3)$.
Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M\in(ABD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{EC}=0 \Leftrightarrow 2(x-1)-(y+1)-3(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-3z+6=0.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (ABD) \text{ est } 2x-y-3z+6=0.}$$

3) a) La droite (EC) est la droite passant par $E(4,-6,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EC}(2,-1,-3)$. Donc

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de le droite } (EC) \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x=4+2k \\ y=-6-k \\ z=2-3k \end{array}\right., k\in\mathbb{R}.}$$

b) Soit $M(4+2k,-6-k,2-3k)$, $k\in\mathbb{R}$, un point de la droite (EC).

$$M\in(ABD) \Leftrightarrow 2(4+2k)-(-6-k)-3(2-3k)+6=0 \Leftrightarrow 14k+14=0 \Leftrightarrow k=-1.$$

Quand $k=-1$, on obtient les coordonnées du point F :

$$\boxed{F(2,-5,5).}$$

4) On a vu à la question 1)b) que Γ est la sphère de centre E et de rayon $R=\sqrt{21}$. La distance d du centre E de Γ au plan (ABD) est la distance de E à son projeté orthogonal sur ce plan c'est-à-dire la distance EF. Or

$$EF=\sqrt{(2-4)^2+(-5+6)^2+(5-2)^2}=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}.$$

Puisque $d<R$, on sait que l'intersection de la sphère Γ et du plan (ABD) est un cercle. Son centre est le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABD) : c'est le point $F(2,-5,5)$.
Enfin, si on note r le rayon du cercle, le théorème de Pythagore permet d'écrire $R^2=r^2+d^2$ et donc

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{21-14}=\sqrt{7}.$$

$$\boxed{\text{L'intersection de } \Gamma \text{ et } (ABD) \text{ est un cercle de centre } F(2,-5,5) \text{ et de rayon } \sqrt{7}.}$$

