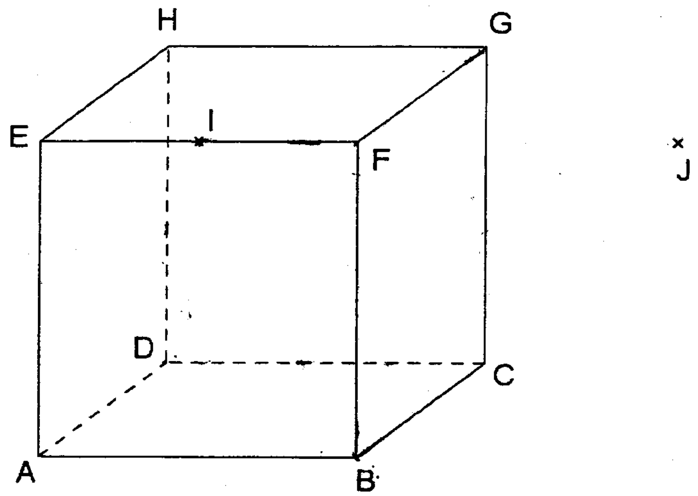
EXERCICE 3 (4 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. a) Déterminer les coordonnées des points I et J.
   b) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   c) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   d) Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   b) Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.
   c) Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$.
   d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

EXERCICE 3

1) a) Le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$. D'autre part, puisque $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Les coordonnées du milieu I de [EF] sont alors $\left(\dfrac{x_E + x_F}{2}, \dfrac{y_E + y_F}{2}, \dfrac{z_E + z_F}{2}\right)$ ou encore $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Le point J est le symétrique du point E par rapport au point F. Donc

- $\dfrac{x_E + x_J}{2} = x_F$ puis $x_J = 2x_F - x_E = 2 \times 1 - 0 = 2$.
- $\dfrac{y_E + y_J}{2} = y_F$ puis $y_J = 2y_F - y_E = 2 \times 0 - 0 = 0$.
- $\dfrac{z_E + z_J}{2} = z_F$ puis $z_J = 2z_F - z_E = 2 \times 1 - 1 = 1$.

$$\boxed{\text{Le point I a pour coordonnées } \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) \text{ et le point J a pour coordonnées } (2, 0, 1).}$$

b) Le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ et et le point J a pour coordonnées $(2, 0, 1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ a pour coordonnées $(x_J - x_D, y_J - y_D, z_J - z_D)$ ou encore $(2, -1, 1)$.

Puisque $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et et le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$.

Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et et le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites (BG) et (BI) sont deux droites sécantes du plan (BGI).

$\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BG} = 2 \times 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$ et $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BI} = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$.

Par suite, le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI) et donc

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{DJ} \text{ est un vecteur normal au plan (BGI).}}$$

c) Le plan (BGI) est le plan passant par $B(1, 0, 0)$ de vecteur normal $\overrightarrow{DJ}(2, -1, 1)$. Une équation cartésienne de ce plan est donc $2 \times (x - 1) - 1 \times (y - 0) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $2x - y + z - 2 = 0$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan (BGI) est } 2x - y + z - 2 = 0.}$$

d) La distance d du point $F(1, 0, 1)$ au plan (BGI) d'équation $2x - y + z - 2 = 0$ est

$$d = \frac{|2 - 0 + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\boxed{\text{La distance du point F au plan (BGI) est } \frac{1}{\sqrt{6}}.}$$

2) a) La droite (Δ) est la droite passant par $F(1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DJ}(2, -1, 1)$. Donc

$$\boxed{\text{une représentation paramétrique de la droite } (\Delta) \text{ est } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$$

b) Le point A a pour coordonnées $(0, 0, 0)$ et le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Donc, le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_H}{2}, \dfrac{y_A + y_H}{2}, \dfrac{z_A + z_H}{2}\right)$ ou encore $\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Or, pour $t = -\dfrac{1}{2}$, on obtient $1 + 2t = 0$, $-t = \dfrac{1}{2}$ et $1 + t = \dfrac{1}{2}$. Donc,

$$\boxed{\text{Le centre K de la face ADHE appartient à la droite } (\Delta).}$$

c) Soit $M(1+2t, -t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (Δ).

$$M \in (BGI) \Leftrightarrow 2(1+2t) - (-t) + (1+t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}.$$

Quand $t = -\frac{1}{6}$, on obtient $1 + 2t = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$ puis $-t = \frac{1}{6}$ et enfin $1 + t = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Donc

$$\boxed{\text{La droite } (\Delta) \text{ et le plan BGI sont sécants en le point } L\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right).}$$

Remarque. $FL = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{6^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ et on retrouve le résultat de la question 1)d).

d) $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{LI} = 0 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + 1 \times \left(0 - \frac{1}{6}\right) + 1 \times \left(1 - \frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$. Donc le point L est sur la hauteur issue de B du triangle BGI.

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{LG} = -\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + 0 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1 \times \left(1 - \frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0$. Donc le point L est sur la hauteur issue de G du triangle BGI.

Le point L est sur deux des trois hauteurs du triangle BGI et donc

$$\boxed{\text{le point L est l'orthocentre du triangle BGI.}}$$

