EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points $A\,(3\,;4\,;0)$; $B\,(0\,;5\,;0)$ et $C\,(0\,;0\,;5)$.
On note I le milieu du segment $[AB]$.

1. Faire une figure où l'on placera les points A, B, C et I dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

2. Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. Soit $H\left(\dfrac{15}{19}\,;\dfrac{45}{19}\,;\dfrac{45}{19}\right)$.

a. Démontrer que les points H, C et I sont alignés.

b. Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

4. Calculs d'aire et de volume

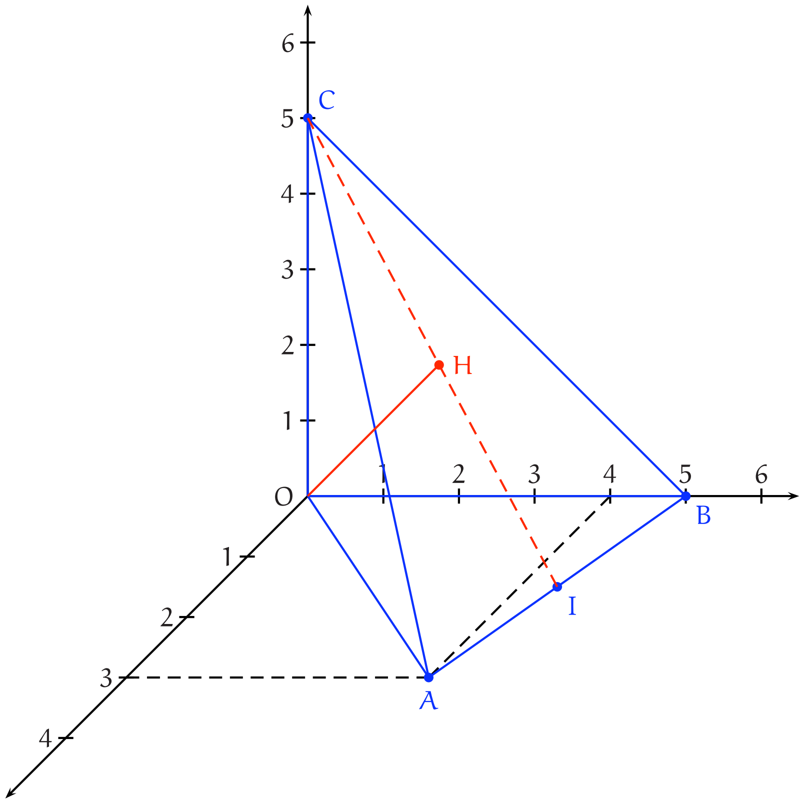
a. Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre $OABC$.

b. Déterminer la distance du point O au plan (ABC).

c. Calculer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 2

1)



2) • $OA = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 = OC$ et donc le triangle OAC est isocèle en O.
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 3\times 0 + 4\times 0 + 0\times 5 = 0$ et donc le triangle OAC est rectangle en O.
• $OB = OC = 5$ et $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$. Donc le triangle OBC est rectangle et isocèle en O.
• On en déduit que $AC = BC = OC\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ et le triangle ABC est isocèle en C.
D'autre part, $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$.
Comme $\sqrt{10} \neq 5\sqrt{2}$, le triangle ABC n'est pas équilatéral.
Comme $AC\sqrt{2} = 10 \neq \sqrt{10} = AB$, le triangle ABC n'est pas isocèle rectangle.

3) a) Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}, \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$ ou encore $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}, 0\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{CI}$ a pour coordonnées $(x_I-x_C, y_I-y_C, z_I-z_C)$ ou encore $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}, -5\right)$. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{CH}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{15}{19}, \dfrac{45}{19}, -\dfrac{50}{19}\right)$. On en déduit que $\overrightarrow{CI} = \dfrac{19}{5\times 2}\overrightarrow{CH}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires et donc

$$\boxed{\text{les points H, C et I sont alignés.}}$$

b) Les points C et I sont dans le plan (ABC). On en déduit que la droite (CI) est contenue dans le plan (ABC). Puisque le point H appartient à la droite (CI), le point H est dans le plan ABC. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{OH}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{15}{19}, \dfrac{45}{19}, \dfrac{45}{19}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(0, -5, 5)$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, 1, 0)$. Donc

$$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} = \frac{15}{19}\times 0 + \frac{45}{19}\times(-5) + \frac{45}{19}\times 5 = 0 \text{ et } \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = \frac{15}{19}\times(-3) + \frac{45}{19}\times 1 + \frac{45}{19}\times 0 = 0.$$

Ainsi, la droite (OH) est orthogonale aux droites (BC) et (BA) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC). On en déduit que la droite (OH) est perpendiculaire au plan (ABC).

En résumé, le point H est dans le plan (ABC) et la droite (OH) est perpendiculaire au plan (ABC). Ceci montre que

$$\boxed{\text{le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).}}$$

c) Le plan (ABC) est le plan passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{OH}$.
Une équation de ce plan est $\frac{15}{19}(x-0)+\frac{45}{19}(y-5)+\frac{45}{19}(z-0)=0$ ou encore $x+3(y-5)+3z=0$ ou enfin $x+3y+3z=15$.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $x+3y+3z=15$.

4) Calculs d'aire et de volume.

a) La distance du point A au segment $[OB]$ est $x_A=3$ et donc l'aire du triangle OAB est $\frac{3\times 5}{2}=\frac{15}{2}$.
Puisque la droite (OC) est perpendiculaire au plan (OAB), le volume du tétraèdre $OABC$ est

$$\frac{\text{aire}(OAB)\times OC}{3}=\frac{(15/2)\times 5}{3}=\frac{75}{6}.$$

Le volume du tétraèdre $OABC$ est $V=\frac{75}{6}$.

b) 1ère solution. Puisque le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC), la distance de O au plan (ABC) est la distance OH avec

$$OH=\sqrt{\left(\frac{15}{19}\times 1\right)^2+\left(\frac{15}{19}\times 3\right)^2+\left(\frac{15}{19}\times 3\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{15}{19}\right)^2(1^2+3^2+3^2)}=\frac{15}{19}\sqrt{1^2+3^2+3^2}$$
$$=\frac{15\sqrt{19}}{19}=\frac{15}{\sqrt{19}}.$$

2ème solution. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $x+3y+3z-15=0$ et donc la distance du point O au plan (ABC) est

$$\frac{|0+0+0-15|}{\sqrt{1^2+3^2+3^2}}=\frac{15}{\sqrt{19}}.$$

La distance du point O au plan (ABC) est $d=\frac{15}{\sqrt{19}}$.

c) On sait que $V=\frac{\text{aire}(ABC)\times d}{3}$ et donc

$$\text{aire}(ABC)=\frac{3V}{d}=\frac{\frac{75}{6}\times 3}{\frac{15}{\sqrt{19}}}=\frac{5\times 15\times 3}{2\times 3}\times\frac{\sqrt{19}}{15}=\frac{5\sqrt{19}}{2}.$$

L'aire du triangle ABC est $\frac{5\sqrt{19}}{2}$.

