Exercice 2 (5 points)

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1 . Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.

2 . En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = 0$.

Partie B

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points A , B , C et D ont pour coordonnées respectives A(3 ; 0 ; 0) , B(0 ; 6 ; 0) , C(0 ; 0 ; 4) et D(-5 ; 0 ; 1) .

1 . a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b) Déterminer une équation du plan (ABC).

2 . a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D.

b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

c) Calculer la distance du point D au plan (ABC).

d) Démontrer que le point H appartient à l'ensemble (E) défini dans la partie **A**.

EXERCICE 2

Partie A

1. Soit M un point de l'espace. Puisque I est le milieu de [AD], on a $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IA}$ et donc

$$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) = \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2.$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ de l'espace, } \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2.}$$

2. Soit M un point de l'espace.

$$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \Leftrightarrow IM = IA.$$

Donc,

$$\boxed{(E) \text{ est la sphère de centre I passant par } A \text{ ou encore la sphère de diamètre [AD].}}$$

Partie B

1. a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-3, 6, 0)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-3, 0, 4)$. Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles et donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés et donc que ces points définissent un plan et un seul.
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 4 \times (-3) + 2 \times 6 = -12 + 12 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 4 \times (-3) + 3 \times 4 = -12 + 12 = 0$. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que

$$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n}(4, 2, 3) \text{ est normal au plan } (ABC).}$$

b) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow 4(x-3) + 2(y-0) + 3(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3z = 12.$$

$$\boxed{\text{Une équation du plan } (ABC) \text{ est } 4x + 2y + 3z = 12.}$$

2. a) Δ est la droite passant par le point $D(-5, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(4, 2, 3)$. Donc

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de } \Delta \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

b) Le point H est l'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Soit $M(-5 + 4t, 2t, 1 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 4(-5 + 4t) + 2(2t) + 3(1 + 3t) = 12 \Leftrightarrow 29t - 17 = 12 \Leftrightarrow t = 1.$$

Pour $t = 1$, on obtient le point de coordonnées $(-1, 2, 4)$ et donc

$$\boxed{\text{le point H a pour coordonnées } (-1, 2, 4).}$$

c) La distance du point D au plan (ABC) est la distance de D à son projeté orthogonal H sur le plan (ABC). Or

$$DH = \sqrt{(-5-(-1))^2 + (0-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{29}.$$

$$\boxed{\text{La distance du point D au plan } (ABC) \text{ est égale à } \sqrt{29}.}$$

d) $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HA} = (-5-(-1))(3-(-1)) + (0-2)(0-2) + (1-4)(0-4) = -16 + 4 + 12 = 0$ et donc

$$\boxed{H \in (E).}$$

