EXERCICE 2 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,2,3)$, $B(0,1,4)$, $C(-1,-3,2)$, $D(4,-2,5)$ et le vecteur $\vec{n}(2,-1,1)$.

1. a) Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

   b) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c) Déterminer une équation du plan (ABC).

2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

   Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

   Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 2

1. a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-1,-1,1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-2,-5,-1)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles (s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, alors $-2 = -t$ et $-5 = -t$ ce qui est impossible) et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés.}}$$

Les points A, B et C définissent donc un plan et un seul.

b) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times(-1)+(-1)\times(-1)+1 = -2+1+1 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times(-2)+(-1)(-5)-1 = -4+5-1 = 0$. Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), on a montré que

$$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (ABC).}$$

c) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)-(y-2)+(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x-y+z = 3.$$

$$\boxed{\text{Une équation du plan } (ABC) \text{ est } 2x-y+z=3.}$$

2. Pour $t=-1$, on obtient $\left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=-2 \\ z=5 \end{array}\right.$. Ceci montre que le point D appartient à la droite (Δ). La droite (Δ) est dirigée par exemple par le vecteur de coordonnées $(-2,1,-1)$. Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{n}$ et donc la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC).

$$\boxed{D \in (\Delta) \text{ et } (\Delta) \text{ est perpendiculaire au plan } (ABC).}$$

3. Puisque (Δ) est la perpendiculaire au plan (ABC) passant par D, le point E est le point d'intersection de (Δ) et du plan (ABC). Soit donc $M(2-2t,-1+t,4-t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (Δ).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(2-2t)-(-1+t)+(4-t) = 3 \Leftrightarrow -6t+9 = 3 \Leftrightarrow t = 1.$$

Quand $t=1$, le point M a pour coordonnées $(0,0,3)$ et donc

$$\boxed{E\,(0,0,3).}$$

Maintenant, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}$ sont $\begin{pmatrix} (1-0)+(0-0)+(-1-0) \\ (2-0)+(1-0)+(-3-0) \\ (3-3)+(4-3)+(2-3) \end{pmatrix}$ ou encore $(0,0,0)$. Ainsi, $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}$ et donc E est l'isobarycentre du triangle ABC ou encore

$$\boxed{E \text{ est le centre de gravité du triangle } ABC.}$$

