EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

L'espace est rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, orthonormé.

On donne le point $A(-1; 2; 3)$ et la droite D de système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite D.

1. .

1.a. Donner une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à la droite D et passant par A.

1.b. Vérifier que le point $B(-3; 3; -4)$ appartient à la droite D.

1.c. Calculer la distance d_B entre le point B et le plan P.

1.d. Exprimer la distance d en fonction de d_B et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d.

2. Soit M un point de la droite D. Exprimer AM^2 en fonction de t. Retrouver alors la valeur de d.

EXERCICE 4

1. a) La droite D est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}(4;1;2)$ et donc P est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(4;1;2)$. Soit alors $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow 4(x+1)+(y-2)+2(z-3) = 0 \Leftrightarrow 4x+y+2z = 4.$$

$$\boxed{\text{Une équation du plan P est } 4x+y+2z=4.}$$

b) Quand $t = -3$ dans le système représentant D, on obtient $x = -3$, $y = 3$ et $z = -4$ ce qui montre que

$$\boxed{B \in D.}$$

c) La distance de B au plan P est

$$d_B = \frac{|4\times(-3)+3+2\times(-4)-4|}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}.$$

$$\boxed{d_B = \sqrt{21}.}$$

d) On a $AB = \sqrt{(-3+1)^2+(3-2)^2+(-4-3)^2} = \sqrt{54}$.
Notons alors H le projeté orthogonal de A sur la droite D. H est aussi le projeté orthogonal de B sur le plan P et d'après le théorème de PYTHAGORE on a $AB^2 = AH^2 + HB^2 = d^2 + d_B^2$ et donc

$$d = \sqrt{AB^2 - d_B^2} = \sqrt{54-21} = \sqrt{33}.$$

$$\boxed{d = \sqrt{33}.}$$

2. Soit $M(9+4t;6+t;2+2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de D.

$$\begin{aligned}AM^2 &= (10+4t)^2+(4+t)^2+(-1+2t)^2 = (16+1+4)t^2+(80+8-4)t+100+16+1 = 21t^2+84t+117\\ &= 21(t^2+4t)+117 = 21\left(t+2\right)^2 - 21\times 2^2+117 = 21(t+2)^2+33.\end{aligned}$$

Par suite, $AM^2 \geq 33$ avec égalité effectivement obtenue pour $t = -2$. Ainsi, la valeur minimum de la distance AM est $\sqrt{33}$ et on retrouve

$$\boxed{d = \sqrt{33}.}$$

