

EXERCICE 2

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2, -2, 2)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles ou encore les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou enfin

les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan et un seul. De plus,

- $2x_A + y_A - z_A - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$
- $2x_B + y_B - z_B - 3 = 2 + 2 - 1 - 3 = 0$
- $2x_C + y_C - z_C - 3 = 6 - 1 - 2 - 3 = 0$.

Ainsi, les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation $2x + y - z - 3 = 0$ et donc

une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x + y - z - 3 = 0$.

2) Le plan (P) admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1, 2, -1)$ et le plan (Q) admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}'$ de coordonnées $(2, 3, -2)$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires et donc les plans (P) et (Q) sont sécants en une droite ($\mathscr{D}$).

On sait que l'ensemble ($\mathscr{D}'$) d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est une droite. Pour vérifier que ($\mathscr{D}'$) est la droite ($\mathscr{D}$), il suffit donc de vérifier tout point de ($\mathscr{D}'$) appartient aux plans (P) et (Q). Or, pour tout réel t ,

$$-2 + t + 2 \times 3 - t - 4 = -2 + t + 6 - t - 4 = 0,$$

et

$$2 \times (-2 + t) + 3 \times 3 - 2 \times t - 5 = -4 + 2t + 9 - 2t - 5 = 0.$$

Donc

les plans (P) et (Q) sont sécants en la droite ($\mathscr{D}$) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

3) L'intersection des plans (ABC), (P) et (Q) est encore l'intersection de la droite ($\mathscr{D}$) et du plan (ABC). Soit donc $M(-2 + t, 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite ($\mathscr{D}$).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(-2 + t) + 3 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow -4 + t = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

Pour $t = 4$, le point M a pour coordonnées $(2, 3, 4)$ et donc

l'intersection des plans (ABC), (P) et (Q) est le point de coordonnées $(2, 3, 4)$.

4) On sait que la distance du point A à la droite ($\mathscr{D}$) est la plus courte distance de A à un point de ($\mathscr{D}$). Soit donc $M(-2 + t, 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite ($\mathscr{D}$).

$$\begin{aligned} AM^2 &= (-2 + t - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (t - 0)^2 = (t - 3)^2 + 4 + t^2 = t^2 - 6t + 9 + 4 + t^2 = 2t^2 - 6t + 13 \\ &= 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 13 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

Par suite, $AM = \sqrt{2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{2}}$. Mais alors, $AM \geq \sqrt{\frac{17}{2}}$ avec égalité obtenue pour $t = \frac{3}{2}$. On en déduit que

la distance du point A à la droite $\mathscr{D}$ est $\sqrt{\frac{17}{2}}$.