EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points :

$$A(2, 1, -1), \quad B(-1, 2, 4), \quad C(0, -2, 3), \quad D(1, 1, -2).$$

et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire sans justifier, si elle est vraie ou fausse.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1) Affirmation 1 : les points A, B et C définissent un plan.

2) Affirmation 2 : la droite (AC) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

3) Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est :

$$x + 8y - z - 11 = 0.$$

4) Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2k \\ y = 2 + 3k \quad (k \in \mathbb{R}). \\ z = 3 - 4k \end{array}\right.$$

5) Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

6) Affirmation 6 : la distance du point C au plan $\mathscr{P}$ est égale à $4\sqrt{6}$.

7) Affirmation 7 : la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan $\mathscr{P}$.

8) Affirmation 8 : le point $E\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Centres étrangers

EXERCICE 1

1)	**Vrai**
2)	**Faux**
3)	**Vrai**
4)	**Faux**
5)	**Faux**
6)	**Faux**
7)	**Vrai**
8)	**Vrai**

Explications.

1) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AC}(-2, -3, 4)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles ou encore les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés et donc que ces points définissent un plan et un seul.

2) $x_C - 2y_C + z_C + 1 = 0 + 4 + 3 + 1 = 8 \neq 0$. Donc $C \notin \mathscr{P}$ et par suite $(AC) \not\subset \mathscr{P}$.

3) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AD}(-1, 0, -1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et D définissent un plan et un seul.
• $x_A + 8y_A - z_A - 11 = 2 + 8 + 1 - 11 = 0$ et donc A appartient au plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$.
• $x_B + 8y_B - z_B - 11 = -1 + 16 - 4 - 11 = 0$ et donc B appartient au plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$.
• $x_D + 8y_D - z_D - 11 = 1 + 8 + 2 - 11 = 0$ et donc D appartient au plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$.
Le plan d'équation $x + 8y - z - 11 = 0$ est bien le plan (ABD).

4) S'il existe un réel k tel que $x_C = 2k$, on a $2k = 0$ puis $k = 0$. Mais alors $2 + 3k = 2 \neq -2 = y_C$. Donc le point C n'appartient pas à la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{array}\right.$ et cette droite n'est pas la droite (AC).

5) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(1, 3, -5)$. De plus

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (-3) \times 1 + 1 \times 3 + 5 \times (-5) = -25 \neq 0.$$

Donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales.

6) $d(C, \mathscr{P}) = \dfrac{|x_C - 2y_C + z_C + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \dfrac{|4 + 3 + 1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{8\sqrt{6}}{6} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3} \neq 4\sqrt{6}$.

7) $d(D,\mathscr{P}) = \dfrac{|x_D - 2y_D + z_D + 1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \dfrac{|1-2-2+1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
Ainsi, la distance du centre de la sphère au plan $\mathscr{P}$ est égale au rayon de cette sphère et on sait que le plan $\mathscr{P}$ est tangent à cette sphère.

8) D'une part, $x_E - 2y_E + z_E + 1 = -\dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{3} + 1 = 0$ et donc le point E appartient au plan $\mathscr{P}$.

D'autre part, un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1,-2,1)$. Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$. On a donc $\overrightarrow{EC} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{n}$. Par suite le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est bien colinéaire au vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et finalement le point E est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

