EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A - Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre-exemple : une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations.

- $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
- L'écriture $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$ signifie que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ n'ont aucun point commun.

1) Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing \text{ et } \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing,$$

alors on peut en conclure que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$.

2) Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing,$$

alors on peut en conclure que $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont tels que :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing \text{ et } \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing.$$

3) Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$.

4) Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace vérifiant ;

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \varnothing \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing,$$

alors on peut en conclure que $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{D} \neq \varnothing$.

Partie B

Dans un repère orthonormal de l'espace, on considère les trois plans suivants :

- $\mathscr{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$;
- $\mathscr{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$;
- $\mathscr{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1) Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants, puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ.

2) En déduire la nature de l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Asie

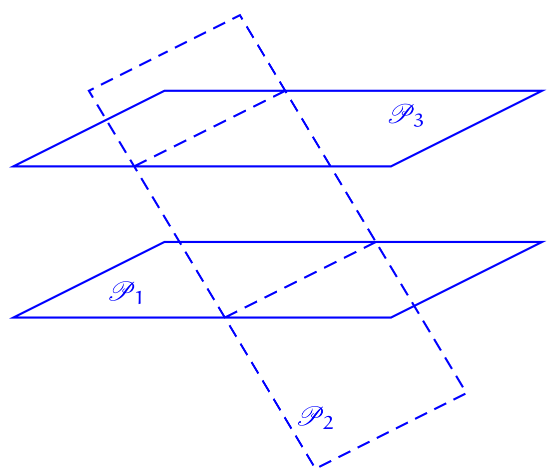
EXERCICE 1

Partie A

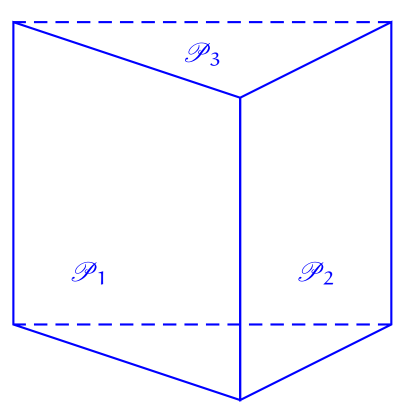
1)	**Faux**
2)	**Faux**
3)	**Vrai**
4)	**Faux**

Démonstrations.

1) Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont strictement parallèles et $\mathscr{P}_2$ est sécant aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, on a $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$ mais $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing$. L'affirmation « $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$ » n'implique donc pas l'affirmation « $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$ ».

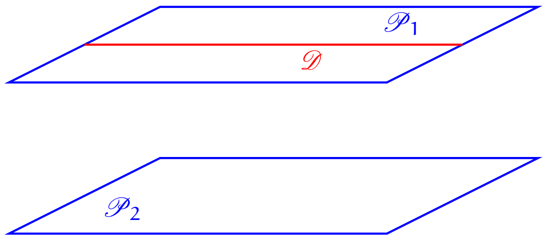


2) Le cas de trois plans deux à deux distincts et sécants, parallèles à une même droite (c'est-à dire trois plans formant un prisme droit) fournit un exemple où $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing$ mais $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$. L'affirmation « $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing$ » n'implique donc pas l'affirmation « $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$ et $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing$ ».



3) $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing$ montre que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont strictement parallèles et $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing$ montre que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite (puisque d'autre part $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont distincts). En résumé, $\mathscr{P}_2$ est sécant à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}_1$ et donc $\mathscr{P}_2$ est sécant à $\mathscr{P}_3$. En particulier, $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \varnothing$. L'affirmation « $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing$ et $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \varnothing$ » implique donc l'affirmation « $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \varnothing$ ».

4) Le cas où $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont strictement parallèles et $\mathscr{D}$ est contenue dans $\mathscr{P}_1$ fournit un exemple où $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$ et $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \varnothing$ mais $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$. L'affirmation « $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \varnothing$ et $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$ » n'implique donc pas l'affirmation « $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{D} \neq \varnothing$ ».



Partie B

1) Le plan $\mathscr{P}_1$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_1(1,1,-1)$ et le plan $\mathscr{P}_2$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_2(2,1,1)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles et donc sont sécants en une droite notée Δ.

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned}
M \in \Delta &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x+y+z-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-y+z \\ 2(-y+z)+y+z-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-y+z \\ -y+3z-3=0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=3z-3 \\ x=-(3z-3)+z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-3+3z \\ x=3-2z \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe un réel } t \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x=3-2t \\ y=-3+3t \\ z=t \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une représentation paramétrique de } \Delta \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x=3-2t \\ y=-3+3t \\ z=t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.}$$

2) $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est donc l'ensemble des points $M(3-2t,-3+3t,t)$, $t \in \mathbb{R}$. Or, pour tout réel t,

$$(3-2t)+2(-3+3t)-4t+3=-2t+6t-4t+3-6+3=0.$$

Donc tout point de $\Delta = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est dans le plan $\mathscr{P}_3$ et finalement $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \Delta$.

$$\boxed{\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \Delta.}$$

