EXERCICE 3 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ;
une réponse inexacte enlève 0,25 point ;
l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

1) L'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que : $\left\{\begin{array}{l} 2x - 6y + 2z - 7 = 0 \\ -x + 3y - z + 5 = 0 \end{array}\right.$ est :

Réponse A : l'ensemble vide	**Réponse B :** une droite
Réponse C : un plan	**Réponse D :** réduit à un point

2) Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 - t \\ y & = & -1 + t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z & = & 2 - 3t \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 + t' \\ y & = & -2 - t' \ (t' \in \mathbb{R}) \\ z & = & 4 + 2t' \end{array}\right. \quad \text{sont :}$$

Réponse A : parallèles et distinctes	**Réponse B :** confondues
Réponse C : sécantes	**Réponse D :** non coplanaires

3) La distance du point $A(1; -2; 1)$ au plan d'équation $-x + 3y - z + 5 = 0$ est égale à :

Réponse A : $\frac{3}{11}$	**Réponse B :** $\frac{3}{\sqrt{11}}$
Réponse C : $\frac{1}{2}$	**Réponse D :** $\frac{8}{\sqrt{11}}$

4) Le projeté orthogonal du point $B(1; 6; 0)$ sur le plan d'équation $-x + 3y - z + 5 = 0$ a pour coordonnées :

Réponse A : $(\ 3\ ;\ 1\ ;\ 5\ )$	**Réponse B :** $(\ 2\ ;\ 3\ ;\ 1\ )$
Réponse C : $(\ 3\ ;\ 0\ ;\ 2\ )$	**Réponse D :** $(\ -2\ ;\ 3\ ;\ -6\ )$

EXERCICE 3

1)

1)	**A**
2)	**C**
3)	**B**
4)	**C**

Explications.

1) Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble considéré. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 6y + 2z - 7 = 0 \\ -x + 3y - z + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 3y + z = \dfrac{7}{2} \\ x - 3y + z = 5 \end{array}\right.$$

Comme $\dfrac{7}{2} \neq 5$, $\mathscr{E} = \varnothing$.

2) Notons (D) et (D') les droites considérées. (D) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(-1, 1, -3)$ et (D') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}'(1, -1, 2)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles et donc sont soit sécantes, soit non coplanaires. Déterminons alors l'intersection de (D) et (D'). Soient $M(1 - t, -1 + t, 2 - 3t)$ et $M'(2 + t', -2 - t', 4 + 2t')$, $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$, des points de (D) et (D') respectivement.

$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - t = 2 + t' \\ -1 + t = -2 - t' \\ 2 - 3t = 4 + 2t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = -t - 1 \\ -1 + t = -2 - (-t - 1) \\ 2 - 3t = 4 + 2(-t - 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = -t - 1 \\ 0t = 0 \\ t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ t' = -1 \end{array}\right.$$

Quand $t = 0$ et $t' = -1$, on obtient un point commun $A(1, -1, 2)$ et les droites (D) et (D') sont sécantes en A.

3) Notons (P) le plan considéré.

$$d(A, (P)) = \frac{|-1 + 3 \times (-2) - 1 + 5|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

4) Notons H le projeté orthogonal de B sur (P) puis (x, y, z) les coordonnées de H.
Un vecteur normal à (P) est le vecteur $\overrightarrow{n}(-1, 3, -1)$. Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$. Par suite, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{BH} = k\overrightarrow{n}$. Ceci fournit $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - k \\ y = 6 + 3k \\ z = -k \end{array}\right.$. Maintenant

$$H \in (P) \Leftrightarrow -(1 - k) + 3(6 + 3k) - (-k) + 5 = 0 \Leftrightarrow 11k + 22 = 0 \Leftrightarrow k = -2.$$

Pour $k = -2$, on obtient les coordonnées de H : $(3, 0, 2)$.

