EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A\left(\frac{2}{3},-3,\ 2\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3},\ 0,-4\right)$.

On note I le milieu du segment [AB] et (*S*) la sphère de diamètre [AB].

1. Soit E le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 1).
   a) Calculer les coordonnées de E.
   b) Montrer que l'ensemble (*P*) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ est le plan médiateur du segment [OE].
   c) Montrer qu'une équation du plan (*P*) est $y=-1$.
2. a) Calculer le rayon de la sphère (*S*) et la distance du centre I de la sphère au plan (*P*).
   En déduire que l'intersection (*C*) du plan (*P*) et de la sphère (*S*) n'est pas vide.
   b) Montrer qu'une équation de (*C*) dans le plan (*P*) est $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(z+1\right)^2=12$.
   En déduire que (*C*) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\ 4\sqrt{3}-1\right)$.
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).
   b) En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (*C*) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

EXERCICE 3

1. a) $x_E = \dfrac{2x_A + x_B}{3} = \dfrac{2\times\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{3} = 0$, $y_E = \dfrac{2y_A + y_B}{3} = \dfrac{2\times(-3)+0}{3} = -2$ et $z_E = \dfrac{2z_A + z_B}{3} = \dfrac{2\times 2 - 4}{3} = 0$.

$$\boxed{\text{Le point E a pour coordonnées } (0, -2, 0).}$$

b) Soit M un point de l'espace. On sait que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (2+1)\overrightarrow{ME} = 3\overrightarrow{ME}$ et donc

$$M \in (P) \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\| \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{ME}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\| \Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{ME}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\| \Leftrightarrow ME = MO.$$

Par suite,

$$\boxed{(P) \text{ est le plan médiateur du segment } [EO].}$$

c) Soit M un point de l'espace dont les coordonnées sont notées (x, y, z).

$$M \in (P) \Leftrightarrow EM = OM \Leftrightarrow EM^2 = OM^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 = y^2 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{4} \Leftrightarrow y = -1.$$

$$\boxed{(P) \text{ est le plan d'équation } y = -1.}$$

2. a) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(-\frac{4}{3} - \frac{2}{3})^2 + (0+3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$ et donc le rayon R de la sphère (S) est $\dfrac{7}{2}$.

D'autre part, le point I a pour coordonnées $(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2})$ ou encore $(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{3}{2}, -1)$ et comme (P) est le plan d'équation $y + 1 = 0$ on a

$$d(I, (P)) = \frac{|0\times(-\frac{1}{3}) + 1\times(-\frac{3}{2}) + 0\times(-1) + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Le rayon } R \text{ de la sphère } (S) \text{ est } \frac{7}{2} \text{ et la distance } d \text{ du point I au plan } (P) \text{ est } \frac{1}{2}.}$$

Comme $d = \dfrac{1}{2} < \dfrac{7}{2} = R$, on sait que l'intersection de (S) et de (P) est un cercle de rayon non nul et en particulier n'est pas vide.

b) Le plan (P) est parallèle au plan (xOz). On peut donc rapporter le plan (P) au repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$ où Ω est le point de coordonnées $(0, -1, 0)$. Soit M un point de (P) dont les coordonnées sont notées $(x, -1, z)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et donc (x, z) dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$.

$$\begin{aligned}
M \in (C) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{2}{3})(x + \frac{4}{3}) + (-1+3)(-1-0) + (z-2)(z+4) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{9} - 2 + z^2 + 2z - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + z^2 + 2z - \frac{98}{9} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + (z+1)^2 - 1 - \frac{98}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 - \frac{99}{9} - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12.
\end{aligned}$$

$$\boxed{(C) \text{ est le cercle dont le centre a pour coordonnées } (-\frac{1}{3}, -1, -1) \text{ et pour rayon } \sqrt{12}.}$$

3. **a)** La droite (ID) est la droite passant par $I(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{ID}(0, 1, 4\sqrt{3})$. Une représentation paramétrique de la droite (ID) est donc

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{3}{2} + t \\ z = -1 + 4\sqrt{3}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

b) On rappelle que le cercle (C) est contenu dans le plan (P) d'équation $y = -1$.

Soient t un réel puis M le point de la droite (ID) de coordonnées $(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2} + t, -1 + 4\sqrt{3}t)$. Le point M appartient au plan (P) si et seulement si $-\frac{3}{2} + t = -1$ ou encore $t = \frac{1}{2}$. La droite (ID) est donc sécante au plan (P) au point $F(-\frac{1}{3}, -1, -1 + 2\sqrt{3})$. Vérifions alors que F appartient au cercle (C).

$$\left(x_F + \frac{1}{3}\right)^2 + (z_F + 1)^2 = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 + 2\sqrt{3} + 1\right)^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12.$$

Ainsi, le point F appartient effectivement au cercle (C) et donc

$$\boxed{\text{la droite } (ID) \text{ coupe le cercle } (C) \text{ au point } F(-\tfrac{1}{3}, -1, -1 + 2\sqrt{3}).}$$

