EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $-x + y + z = 0$.
Soit A le point de coordonnées $(0; 1; 1)$.

1) Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2) Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} + t \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Démontrer que les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (d).

3) Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P').

4) En déduire la distance du point A à la droite (d).

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2007
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire

EXERCICE 1

1) Un vecteur normal au plan (P) est le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 2, -1)$ et un vecteur normal au plan (P') est le vecteur $\overrightarrow{n'}(-1, 1, 1)$. De plus,

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{les plans } (P) \text{ et } (P') \text{ sont perpendiculaires.}}$$

2) Puisque les plans (P) et (P') sont perpendiculaires, les plans (P) et (P') sont en particulier sécants en une droite. Vérifions alors que tout point de la droite (d) appartient à (P) et à (P').

Soit $M(-\frac{1}{3} + t, -\frac{1}{3}, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite (d). Puisque

$$\left(-\frac{1}{3} + t\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) - t + 1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = 0,$$

le point M appartient au plan (P) et puisque

$$-\left(-\frac{1}{3} + t\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + t = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0,$$

le point M appartient au plan (P'). Ainsi tout point de la droite (d) est un point de la droite $(P) \cap (P')$ et finalement

$$\boxed{(P) \cap (P') \text{ est la droite } (d) \text{ de représentation paramétrique } \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{array}\right. .}$$

3) Calculons la distance du point A au plan (P).

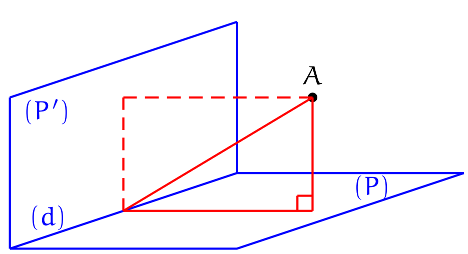
$$d(A, (P)) = \frac{|0 + 2 \times 1 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

De même

$$d(A, (P')) = \frac{|0 + 1 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\boxed{d(A, (P)) = \frac{2}{\sqrt{6}} \text{ et } d(A, (P')) = \frac{2}{\sqrt{3}}.}$$

4) Puisque les plans (P) et (P') sont perpendiculaires, la distance du point A à la droite (d) est fournie par le théorème de Pythagore :



$$(d(A,(d))^2 = (d(A,(P))^2 + (d(A,(P'))^2 = \frac{4}{6} + \frac{4}{3} = 2,$$

et donc

$$\boxed{\text{la distance du point } A \text{ à la droite } (d) \text{ vaut } \sqrt{2}.}$$

