Exercice 3 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Partie A

(*cette partie constitue une restitution organisée de connaissances*)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.
Soit P le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.
On considère le point I de coordonnées (x_I,y_I,z_I) et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a,b,c).

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan P est égale à $\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan P.
   Déterminer, en fonction de a, b, c, x_I, y_I et z_I, un système d'équations paramétriques de Δ.

2. On note H le point d'intersection de Δ et P.
   a. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH}=k\vec{n}$.
   b. Déterminer l'expression de k en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I.
   c. En déduire que $IH=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Partie B

Le plan Q d'équation $x-y+z-11=0$ est tangent à une sphère S de centre le point Ω de coordonnées $(1,-1,3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère S.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan Q.

3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère S et du plan Q.

Exercice 3

Partie A

1. Soit M un point de l'espace. On note (x, y, z) les coordonnées de M.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{n} \Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{n}$$
$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = x_I + ta \\ y = y_I + tb \\ z = z_I + tc \end{array}\right. .$$

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de } \Delta \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x = x_I + ta \\ y = y_I + tb \\ z = z_I + tc \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.}$$

2. a) Puisque Δ est la droite passant par I de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}$.
b) Les coordonnées de H sont $(x_I + ka, y_I + kb, z_I + kc)$.

$$H \in P \Leftrightarrow a(x_I + ka) + b(y_I + kb) + c(z_I + kc) + d = 0 \Leftrightarrow k(a^2 + b^2 + c^2) + ax_I + by_I + cz_I + d = 0$$
$$\Leftrightarrow k = -\frac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2} \ (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \text{ car } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)).$$

$$\boxed{k = -\frac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2}.}$$

c) Mais alors

$$IH = \|\overrightarrow{IH}\| = |k|.\|\overrightarrow{n}\| = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$\boxed{IH = \frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

Partie B

1. Puisque le plan Q est tangent à la sphère S, on sait que le rayon de S est la distance de Ω au plan Q. Or

$$d(\Omega, Q) = \frac{|1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 3 - 11|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

$$\boxed{S \text{ est une sphère de rayon } 2\sqrt{3}.}$$

2. Δ est la droite passant par $\Omega(1, -1, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1, -1, 1)$ (vecteur normal au plan Q). Un système d'équations paramétriques de Δ est donc $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$

3. Puisque Q est tangent à S, S et Q ont en commun un point et un seul qui est aussi le point d'intersection de Q et de Δ. Soient t un réel puis $M(1 + t, -1 - t, 3 + t)$ un point quelconque de Δ.

$$M \in Q \Leftrightarrow (1 + t) - (-1 - t) + (3 + t) - 11 = 0 \Leftrightarrow 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Le point d'intersection de la sphère S et du plan Q est donc le point de coordonnées $(3, -3, 5)$.

