EXERCICE 2 (5 points)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$, on donne les points $A(0\,,0\,,2)$ $B(0\,,4\,,0)$ et $C(2\,,0\,,0)$.

On désigne par I le milieu du segment [BC], par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ est le plan (AIO) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ est la sphère de diamètre [BC] ».

Proposition 3 : « le volume du tétraèdre OABC est égal à 4 ».

Proposition 4 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x+y+2z=4$ et le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9}\right)$ ».

Proposition 5 : « la droite (AG) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=2-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ ».

EXERCICE 2

Proposition 1.	**Faux**
Proposition 2.	**Vrai**
Proposition 3.	**Faux**
Proposition 4.	**Vrai**
Proposition 5.	**Vrai**

Démonstrations.

Proposition 1. (L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$ est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$ ($\neq \overrightarrow{0}$) passant par A.) On note $(\mathscr{P})$ ce plan.

Les coordonnées du point I sont $(1, 2, 0)$ et donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI}$ sont $(1, 2, -2)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ sont $(2, -4, 0)$. Donc,

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = 1 \times 2 + 2 \times (-4) + (-2) \times 0 = -6 \neq 0,$$

ce qui montre le point I n'est pas dans $(\mathscr{P})$. La proposition 1 est donc fausse.

Proposition 2. Soit M un point du plan.

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{CB}\| \Leftrightarrow MI = \frac{BC}{2}.$$

L'ensemble considéré est la sphère de centre I, le milieu de $[BC]$ et de rayon $\dfrac{BC}{2}$ qui est aussi la sphère de diamètre $[BC]$. La proposition 2 est donc vraie.

Proposition 3. La droite (OB) est perpendiculaire au plan (OAC) car $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} = 0$. Donc, la hauteur issue de B du tétraèdre $(OABC)$ est OB. Le volume de $(OABC)$ est donc

$$\frac{1}{3} \times \text{aire}(OAC) \times OB = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times 4 = \frac{8}{3}.$$

Proposition 4. Il est clair que les points A, B et C ne sont pas alignés. Ces trois points déterminent donc un et un seul plan. Il est aussi clair que les coordonnées de chacun de ces trois points vérifient l'équation $2x+y+2z = 4$. Le plan (ABC) est donc bien le plan d'équation $2x + y + 2z = 4$. Notons alors H' le point de coordonnées $(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9})$.
Puisque $2 \times \frac{8}{9} + \frac{4}{9} + 2 \times \frac{8}{9} = \frac{36}{9} = 4$, le point H' appartient au plan (ABC). Enfin, un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2, 1, 2)$. $\overrightarrow{OH'}$ a pour coordonnées $(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9})$ et donc

$$\overrightarrow{OH'} = \frac{4}{9}\overrightarrow{n}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{OH'}$ est donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ ce qui montre finalement que H' est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) ou encore que le point H a pour coordonnées $(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9})$.

Proposition 5. Puisque $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, le point G a pour coordonnées $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$. En particulier, le point G n'est pas le point A et les points A et G définissent une et une seule droite.

Dans la représentation paramétrique de l'énoncé, $t = 0$ fournit le point A et $t = \frac{2}{3}$ fournit le point G. La droite (AG) admet donc effectivement pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{array}\right.$, $(t \in \mathbb{R})$.

