EXERCICE 1 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A (2 ; 1 ; 3), B (-3 ; -1 ; 7) et C (3 ; 2 ; 4).

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

a) Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).

a) Montrer que H est le barycentre de (A ; -2), (B ; -1) et (C ; 2).

b) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1 des points M de l'espace tels que $(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0.$

c) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2 des points M de l'espace tels que $\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})\| = \sqrt{29}.$
En préciser les éléments caractéristiques.

d) Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

e) Le point S(-8 ; 1 ; 3) appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 ?

BACCALAUREAT GENERAL

Session 2006

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Liban

EXERCICE 1

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-5, -2, 4)$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a) Les trois points A, B et C n'étant pas alignés, ils déterminent un et un seul plan. La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) si et seulement si la droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
Un vecteur directeur de la droite (d) est le vecteur $\overrightarrow{u}$ dont les coordonnées sont $(2, -3, 1)$. Puisque

$$2 \times (-5) + (-3) \times (-2) + 1 \times 4 = -10 + 6 + 4 = 0 \text{ et que } 2 \times 1 + (-3) \times 1 + 1 \times 1 = 2 - 3 + 1 = 0,$$

le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Ainsi, la droite (d) est orthogonale aux deux droites sécantes (AB) et (AC) et donc

$$\boxed{\text{la droite } (d) \text{ est orthogonale au plan } (ABC).}$$

b) Le plan (ABC) est donc le plan de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ passant par A.
Soit M un point de l'espace. On note (x, y, z) ses coordonnées.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow 2(x-2) - 3(y-1) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + z - 4 = 0.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (ABC) \text{ est } 2x - 3y + z - 4 = 0.}$$

3. a) Puisque la droite (d) est orthogonale au plan (ABC), elle est sécante à ce plan en un unique point que l'on note H.
Notons H' le barycentre de $(A; -2)$, $(B; -1)$ et $(C; 2)$. On a alors

$$x_{H'} = \frac{1}{-2-1+2}(-2x_A - x_B + 2x_C) = -(-4 + 3 + 6) = -5$$

et de même

$$y_{H'} = \frac{1}{-2-1+2}(-2y_A - y_B + 2y_C) = -(-2 + 1 + 4) = -3 \text{ et } z_{H'} = \frac{1}{-2-1+2}(-2z_A - z_B + 2z_C) = -(-6 - 7 + 8) = 5.$$

Les coordonnées du point H' sont donc $(-5, -3, 5)$.

- Puisque $2 \times (-5) - 3 \times (-3) + 5 - 4 = -10 + 9 + 5 - 4 = 0$, le point H' appartient au plan (ABC).
- Puisque $\left\{\begin{array}{l} x_{H'} = -5 = -7 + 2 \times 1 \\ y_{H'} = -3 = -3 \times 1 \\ z_{H'} = 5 = 4 + 1 \end{array}\right.$, le point H' appartient à la droite (d).

Finalement, le point H' est la point d'intersection du plan (ABC) et de la droite (d). Donc $H' = H$.

$$\boxed{H \text{ est le barycentre de } (A; -2), (B; -1) \text{ et } (C; 2).}$$

b) Pour tout point M de l'espace, on a

$$-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (-2-1+2)\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HM} \text{ et } \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}.$$

Donc

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{CB} = 0.$$

$\boxed{\Gamma_1 \text{ est le plan de vecteur normal } \overrightarrow{CB} \text{ passant par } H.}$

c) Pour tout point M de l'espace

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \sqrt{29} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{HM}\| = \sqrt{29} \Leftrightarrow HM = \sqrt{29}.$$

$\boxed{\Gamma_2 \text{ est la sphère de centre } H \text{ et de rayon } \sqrt{29}.}$

d) L'intersection de Γ_1 et de Γ_2 est l'intersection de la sphère de centre H et de rayon $\sqrt{29}$ avec un plan passant par H. Il s'agit d'un cercle de centre H et de même rayon que la sphère.

$\boxed{\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \text{ est le cercle de centre } H \text{ et de rayon } \sqrt{29} \text{ du plan } \Gamma_1.}$

e) Le vecteur $\overrightarrow{HS}$ a pour coordonnées $(-3, 4, -2)$. Donc $HS = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$.

Le point S appartient à la sphère Γ_2.

Le vecteur $\overrightarrow{CB}$ a pour coordonnées $(-6, -3, 3)$. Donc $\overrightarrow{HS}.\overrightarrow{CB} = (-3)\times(-6) + 4\times(-3) + (-2)\times 3 = 18 - 12 - 6 = 0$.

Le point S appartient au plan Γ_1.

Finalement,

$\boxed{\text{Le point } S \text{ appartient à l'intersection de } \Gamma_1 \text{ et } \Gamma_2.}$

