Exercice 3 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1,0,2)$, $(1,1,4)$ et $(-1,1,1)$.

1. *a.* Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3,4,-2)$.
   Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.

   a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
   b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

   a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.

   b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privé du point C.
   Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment $[IC]$ coïncide-t-il avec G ?

EXERCICE 3

1. a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(0, 1, 2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-2, 1, -1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc

$$\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

Ainsi, les points A, B et C définissent un plan.
b. $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = (-2) \times 3 + 1 \times 4 + (-1) \times (-2) = -6 + 4 + 2 = 0$. Donc

$$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est orthogonal aux vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC}.}$$

Puisque le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC). Le plan (ABC) est donc le plan passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Une équation cartésienne de ce plan est

$$3(x - 1) + 4(y - 0) - 2(z - 2) = 0,$$

ou encore

$$\boxed{(ABC)\ :\ 3x + 4y - 2z + 1 = 0.}$$

2. a. Un vecteur normal au plan P_1 est le vecteur $\overrightarrow{n}_1(2, 1, 2)$. Un vecteur normal au plan P_2 est le vecteur $\overrightarrow{n}_2(1, -2, 6)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles. On sait alors que

$$\boxed{\text{les plans } P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont sécants selon une droite D.}}$$

Déterminons un système d'équations paramétriques de la droite D.
Soit M un point de l'espace dont les coordonnées sont notées (x, y, z).

$$\begin{aligned}
M \in P_1 \cap P_2 &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2x - 2z - 1 \\ x - 2(-2x - 2z - 1) + 6z = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2x - 2z - 1 \\ 5x + 10z + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2z - \dfrac{2}{5} \\ y = -2\left(-2z - \dfrac{2}{5}\right) - 2z - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{5} - 2z \\ y = -\dfrac{1}{5} + 2z \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel k tel que } \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{5} - 2k \\ y = -\dfrac{1}{5} + 2k \\ z = k \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Un système d'équations paramétriques de la droite D est } \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{5} - 2k \\ y = -\dfrac{1}{5} + 2k \\ z = k \end{array}\right., \ k \in \mathbb{R}.}$$

b. Dans le système précédent, on lit les coordonnées d'un vecteur directeur de D : le vecteur $\overrightarrow{u}(-2, 2, 1)$ est un vecteur directeur de D.
On a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = (-2) \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times (-2) = -6 + 8 - 2 = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$ et on sait alors que

$$\boxed{\text{la droite D et le plan (ABC) sont parallèles.}}$$

3. a. Soit t un réel positif. La somme des coefficients de A, B et C vaut $3 + t$ et est strcitement positive. En particulier, cette somme n'est pas nulle et donc G existe.

Les coordonnées de I sont $\left(\frac{x_A + 2x_B}{3}, \frac{y_A + 2y_B}{3}, \frac{z_A + 2z_B}{3}\right)$ ou encore $\left(\frac{1+2}{3}, \frac{0+2}{3}, \frac{2+8}{3}\right)$ et donc

$$\boxed{I\left(1, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right).}$$

D'après le théorème du barycentre partiel, on a

$$G = \text{bar}\{A(1), B(2), C(t)\} = \text{bar}\{I(3), C(t)\}.$$

On sait alors que pour tout point M de l'espace, on a

$$3\overrightarrow{MI} + t\overrightarrow{MC} = (t+3)\overrightarrow{MG}.$$

Quand $M = I$, on obtient en particulier $t\overrightarrow{IC} = (t+3)\overrightarrow{IG}$ et donc

$$\boxed{\overrightarrow{IG} = \frac{t}{t+3}\overrightarrow{IC}.}$$

b. Pour t réel positif ou nul, posons $f(t) = \frac{t}{t+3}$. f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif t,

$$f'(t) = \frac{1 \times (t+3) - t \times 1}{(t+3)^2} = \frac{3}{(t+3)^2}.$$

f' est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
Ainsi, f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus $f(0) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{t}} = 1$. On en déduit que quand t décrit l'intervalle $[0, +\infty[$, $f(t)$ décrit l'intervalle $[0, 1[$. Enfin, puisque pour tout réel positif t, on a $\overrightarrow{IG} = f(t)\overrightarrow{IC}$,

$$\boxed{\text{lorsque } t \text{ décrit } [0, +\infty[\text{, le point } G \text{ décrit le segment } [IC] \text{ privé du point } C.}$$

Le point G est le point J si et seulement si le coefficient $\frac{t}{t+3}$ est égal à $\frac{1}{2}$. Or

$$\frac{t}{t+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t = t + 3 \Leftrightarrow t = 3.$$

$$\boxed{\text{Le point } G \text{ est le point } J \text{ si et seulement si } t = 3.}$$

