EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Un réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* $0,5$ *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère les points $A(3;1;3)$ et $B(-6;2;1)$.
Le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne $x+2y+2z=5$.

1) L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|=2$ est :

a) un plan de l'espace **b)** une sphère **c)** l'ensemble vide

2) Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ sont :

a) $\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ **b)** $\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{3}\right)$ **c)** $\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

3) La sphère de centre B et de rayon 1 :

a) coupe le plan $\mathscr{P}$ suivant un cercle **b)** est tangente au plan $\mathscr{P}$ **c)** ne coupe pas le plan $\mathscr{P}$

4) On considère la droite $\mathscr{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1;2;-1)$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont :

a) coplanaires et parallèles **b)** coplanaires et sécantes $\mathscr{P}$ **c)** non coplanaires

5) L'ensemble des points M de l'espace equidistants des points A et B est :

a) la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}-t \\ y=\dfrac{3}{2}-7t \\ z=2+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ **b)** le plan d'équation cartésienne $9x-y+2z+11=0$ **c)** le plan d'équation cartésienne $x+7y-z-7=0$

EXERCICE 2
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.	**b.**
2.	**c.**
3.	**c.**
4.	**c.**
5.	**b.**

Explications.

1. Soit $\Omega = \text{bar}\{A(4), B(-1)\}$. On sait que pour tout point M de l'espace, on a $4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = (4-1)\overrightarrow{M\Omega} = 3\overrightarrow{M\Omega}$. Par suite,

$$\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = 2 \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{M\Omega}\| = 2 \Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{M\Omega}\| = 2 \Leftrightarrow \Omega M = \frac{2}{3}.$$

L'ensemble considéré est donc la sphère de centre Ω et de rayon $\frac{2}{3}$.

2. Le point de coordonnées $\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$ car $\frac{8}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{7}{3} = \frac{24}{3} = 8 \neq 5$. Les deux autres points par contre appartiennent au plan $\mathscr{P}$.
Le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, 2, 2)$.
Si H a pour coordonnées $\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, alors $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ et ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$. Enfin, si H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$, alors $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. Dans ce cas, on a $\overrightarrow{AH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{n}$ et le point H de la proposition c. est le bon.

3. Calculons la distance d du point B au plan $\mathscr{P}$.

$$d = \frac{|1 \times (-6) + 2 \times 2 + 2 \times 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{5}{3}.$$

Puisque cette distance est strictement supérieure au rayon de la sphère considérée, l'intersection de la sphère de centre B et de rayon 1 et du plan $\mathscr{P}$ est vide.

4. Un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ est $\overrightarrow{u'}(2, 1, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{u'}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ et donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont ou bien coplanaires et sécantes ou bien non coplanaires. Il reste à étudier l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
Un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$ est $\left\{\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - t \end{array}\right.$ Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que $\left\{\begin{array}{l} x = 3 + t = 3 + 2t' \\ y = 1 + 2t = 3 + t' \\ z = 3 - t = t' \end{array}\right.$. Or

$$\left\{\begin{array}{l} 3 + t = 3 + 2t' \\ 1 + 2t = 3 + t' \\ 3 - t = t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 3 - t \\ 3 + t = 3 + 2(3 - t) \\ 1 + 2t = 3 + (3 - t) \\ 3 - t = t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 3 - t \\ 3t = 6 \\ 3t = 5 \end{array}\right. .$$

Ce système n'a pas de solution et donc $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \varnothing$. Finalement, puisque $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont non coplanaires.

5. Soit M un point de l'espace dont les coordonnées sont notées (x, y, z).

$MA = MB \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = (x+6)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow 18x - 2y + 4z + 22 = 0 \Leftrightarrow 9x - y + 2z + 11 = 0.$

