EXERCICE 2 (5 points)

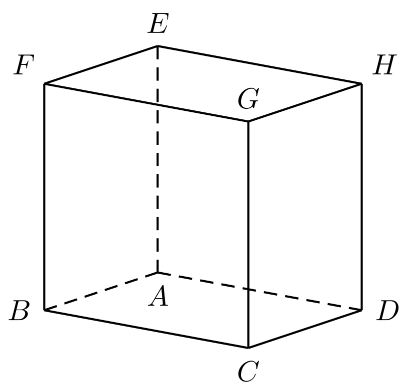
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Les réponses à cet exercice sont à <u>inscrire sur la feuille jointe en annexe</u>. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Pour chacune des cinq questions, une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses exactes rapportent 1 point et 2 réponses exactes rapportent $1/2$ point.



Soit $ABCDEFGH$ un carré de côté 1.

On choisit le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FG]$.
L est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 3)\}$.
Soit (π) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.

1) Les coordonnées de L sont :

a) $(\frac{1}{4}; 0; 0)$ ☐ **b)** $(\frac{3}{4}; 0; 0)$ ☐ **c)** $(\frac{2}{3}; 0; 0)$ ☐

2) Le plan (π) est le plan :

a) (GLE) ☐ **b)** (LEJ) ☐ **c)** (GFA) ☐

3) Le plan parallèle au plan (π) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées :

a) $(1; 0; \frac{1}{4})$ ☐ **b)** $(1; 0; \frac{1}{5})$ ☐ **c)** $(1; 0; \frac{1}{3})$ ☐

4) **a)** Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B ☐

b) Les droites (EL) et (IM) sont parallèles ☐

c) Les droites (EL) et (IM) sont sécantes ☐

5) Le volume du tétraèdre $FIJM$ est :

a) $\frac{1}{36}$ ☐ **b)** $\frac{1}{48}$ ☐ **c)** $\frac{1}{24}$ ☐

EXERCICE 2

1) a) Faux b) Vrai c) Faux

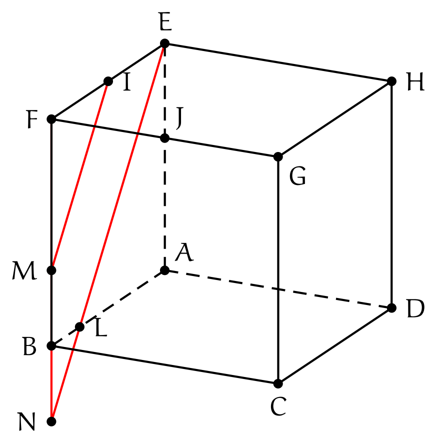
2) a) Vrai b) Faux c) Faux

3) a) Faux b) Faux c) Vrai

4) a) Vrai b) Vrai c) Faux

5) a) Vrai b) Faux c) Faux

Explications.



1) On a $A(0,0,0)$ et $B(1,0,0)$ et donc $x_L = \dfrac{x_A + 3 \times x_B}{4} = \dfrac{0 + 3 \times 1}{4} = \dfrac{3}{4}$ puis $y_L = z_L = 0$.

2) $4 \times 0 - 4 \times 0 + 3 \times 0 - 3 = -3 \neq 0$. Donc le point A n'appartient pas à Π et la réponse c) est fausse.
Puisque $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD} + 1.\overrightarrow{AE}$, on a $F(1,0,1)$.
puisque $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 1.\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1.\overrightarrow{AE}$, on a $G(1,1,1)$. Les coordonnées de J sont donc $(1, \dfrac{1}{2}, 1)$ et comme $4 \times 1 - 4 \times \dfrac{1}{2} + 3 \times 1 - 3 = 2 \neq 0$, le point J n'appartient pas au plan Π. La réponse b) est donc fausse.
Puisqu'au moins une réponse est exacte, c'est nécessairement la réponse a).

3) • Puisque E a pour coordonnées $(0,0,1)$ et $F(1,0,1)$, le point I qui est le milieu du segment $[EF]$ a pour coordonnées $(\dfrac{1}{2}, 0, 1)$.

• Un plan parallèle à Π a une équation de la forme $4x - 4y + 3z + a = 0$. Un tel plan passe par I si et seulement si $4 \times \dfrac{1}{2} - 4 \times 0 + 3 \times 1 + a = 0$ ce qui équivaut à $a = -5$. Une équation cartésienne du plan (P) parallèle à (Π) passant par I est donc $4x - 4y + 3z - 5 = 0$.

• La droite (BF) passe par le point $B(1,0,0)$ et admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{BF}$ de coordonnées $(1-1, 0-0, 1-0)$ ou encore $(0,0,1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (BF) est donc $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

• Le point de coordonnées $(1,0,t)$ appartient à (P) si et seulement si $4 + 3t - 5 = 0$ ce qui équivaut à $t = \dfrac{1}{3}$. Le point d'intersection de la droite (FB) et du plan (P) est donc le point M de coordonnées $(1, 0, \dfrac{1}{3})$.

4) Le point L a pour coordonnées $(\dfrac{3}{4}, 0, 0)$ et le point E a pour coordonnées $(0,0,1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{EL}$ a pour coordonnées $(\dfrac{3}{4}, 0, -1)$.
Le point F a pour coordonnées $(1,0,1)$ et le point B a pour coordonnées $(1,0,0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{FB}$ a pour coordonnées $(0,0,-1)$.

Le point I a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ et le point M a pour coordonnées $(1, 0, \frac{1}{3})$. Donc le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{2}{3})$.

On a $\overrightarrow{IM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EL}$. Donc la droite (IM) est parallèle à la droite (EL). La réponse b) est vraie et la réponse c) est fausse.

Les vecteur $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{FB}$ ne sont pas colinéaires. Donc les droites (EL) et (FB) ne sont pas parallèles. Comme ces droites sont coplanaires (elles sont contenues dans le plan (ABE)), elles sont sécantes en un point N.

La droite (EL) est la droite passant par le point $E(0, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EL}(\frac{3}{4}, 0, -1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (EL) est donc $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4}t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. Le point $N(\frac{3}{4}t, 0, 1 - t)$ appartient à la droite (FB) si et seulement si $x_N = 1$ ou encore $t = \frac{4}{3}$. Pour cette valeur de t, on obtient $N(1, 0, -\frac{1}{3})$. Le point N est le symétrique du point $M(1, 0, \frac{1}{3})$ par rapport au point $B(1, 0, 0)$. La réponse a) est donc vraie.

5) On peut prendre comme base du tétraèdre $FIJM$ le triangle FIJ et comme hauteur la droite (FM). On sait que le volume du tétraèdre $FIJM$ est

$$V = \frac{(\text{aire de FIJ}) \times FM}{3} = \frac{\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \text{aire de EFGH}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times BF\right)}{3} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{3} = \frac{1}{36}.$$

