EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève ½ point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne le point $S(1 ; -2 ; 0)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1) Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point S et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ est :

A : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t, \; t \in \mathbf{R} \\ z = -3 \end{cases}$ **B** : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t, \; t \in \mathbf{R} \\ z = 1-3t \end{cases}$ **C** : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-2t, \; t \in \mathbf{R} \\ z = 3t \end{cases}$ **D** : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \;, \; t \in \mathbf{R} \\ z = -3-3t \end{cases}$

2) Les coordonnées du point d'intersection H de la droite $\mathcal{D}$ avec le plan $\mathcal{P}$ sont :

A : $(-4; 0; 0)$ **B** : $\left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{-3}{5}\right)$ **C** : $\left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ **D** : $\left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$

3) La distance du point S au plan $\mathcal{P}$ est égale à :

A : $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$ **B** : $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$ **C** : $\dfrac{9}{\sqrt{11}}$ **D** : $\dfrac{9}{11}$

4) On considère la sphère de centre S et de rayon 3.

L'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est égale :

A : au point $I(1 ; -5 ; 0)$

B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r = \dfrac{3\sqrt{10}}{11}$

EXERCICE 3

1)	**D**
2)	**D**
3)	**B**
4)	**B**

Explications.

1) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 1, -3)$. La droite de la proposition A est dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, -2, 0)$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$ et la droite de la proposition C est dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, -2, 3)$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Les réponses A et C sont donc mauvaises.

Il reste les propositions B et D. Dans chacun de ces deux cas, la droite considérée est dirigée par $\overrightarrow{n}$ et est donc parallèle à la droite $\mathscr{D}$. Dans D, $t = -1$ fournit $x = 1$, $y = -2$ et $z = 0$ ce qui montre que le point S appartient à la droite de la proposition D. Puisqu'il n'y a qu'une seule bonne réponse, c'est la D.

Vérifions néanmoins que la proposition B est mauvaise. L'égalité $1 = 2 + t$ fournit $t = -1$ et l'égalité $0 = 1 - 3t$ fournit $t = \dfrac{1}{3}$. Le réel t ne pouvant être simultanément égal à -1 et à $\dfrac{1}{3}$, le point S n'appartient pas à la droite de la proposition B, proposition qui est donc fausse.

2) Puisque H est sur la droite $\mathscr{D}$, les coordonnées de H sont de la forme $(2 + t, -1 + t, -3 - 3t)$ où t est un réel.

$$H \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (2 + t) + (-1 + t) - 3(-3 - 3t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 11t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{14}{11}.$$

Mais alors les coordonnées de H sont $(2 - \dfrac{14}{11}, -1 - \dfrac{14}{11}, -3 + 3 \times \dfrac{14}{11})$ ou encore $(\dfrac{8}{11}, -\dfrac{25}{11}, \dfrac{9}{11})$.

3) La distance de S au plan $\mathscr{P}$ vaut $\dfrac{|1 + (-2) - 3 \times 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2}}$ ou encore $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

4) La distance d de S au plan $\mathscr{P}$ vaut $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$ et le rayon R de $\mathscr{S}$ vaut 3. Par suite $d < R$ et donc l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est un cercle $\mathscr{C}$ de rayon strictement positif noté r.

D'après le théorème de PYTHAGORE, $R^2 = d^2 + r^2$ et donc

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{11}} = \sqrt{\frac{90}{11}} = 3\sqrt{\frac{10}{11}}.$$

Puisqu'il n'y a qu'une bonne réponse, la bonne réponse est nécessairement la réponse B. Notons tout de même que le centre du cercle $\mathscr{C}$ est la projection orthogonale du point S sur le plan $\mathscr{P}$ c'est-à-dire le point H. La réponse B est donc effectivement la bonne réponse.

