EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On considère le tétraèdre $ABCD$. On note I le milieu du segment $[AB]$ et J celui du segment $[CD]$.

1) **(a)** Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(C,-1),(D,1)\}$.
Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placer I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

(b) Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(D,2)\}$.
Démontrer que G_2 est le milieu du segment $[ID]$. Placer G_2.

(c) Montrer que IG_1DJ st un parallélogramme. En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2) Soit m un réel.
On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(C,m-2),(D,m)\}$.

(a) Préciser l'ensemble E des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.

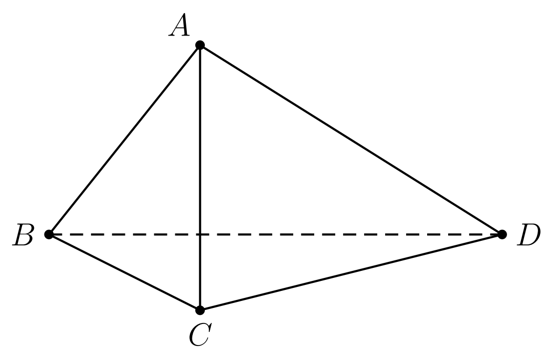
Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble E.

(b) Démontrer que G_m appartient au plan (ICD).

(c) Démontrer que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.

(d) En déduire l'ensemble F des points G_m lorsque m décrit l'ensemble E.

Feuille à joindre avec la copie

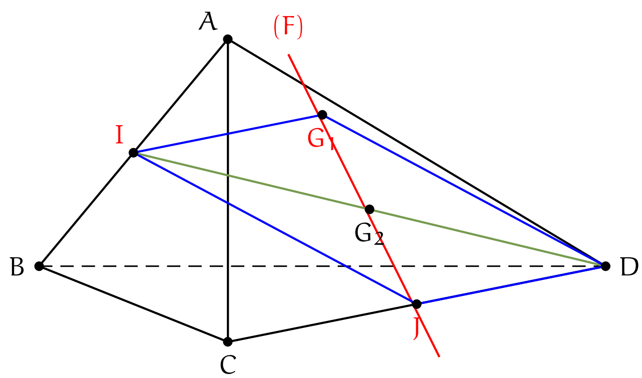


EXERCICE 4
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) **(a)** Puisque $1+1-1+1=2\neq 0$, on sait que G_1 est bien défini. De plus pour tout point M de l'espace on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MG_1}$.
En prenant $M = I$, on obtient

$$\overrightarrow{IG_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{0}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{ID}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

$$\boxed{\overrightarrow{IG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.}$$



(b) I est l'isobarycentre du système formé des deux points A et B et donc, d'après le théorème du barycentre partiel on a

$$G_2=\text{bar}\{(A,1),(B,1),(D,2)\}=\text{bar}\{(I,2),(D,2)\}=\text{bar}\{(I,1),(D,1)\}.$$

$$\boxed{G_2 \text{ est le milieu du segment } [ID]\cdot}$$

(c) D'après la question 1), on a $\overrightarrow{IG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ou encore, puisque J est le milieu du segment $[CD]$, $\overrightarrow{IG_1}=\overrightarrow{JD}$. Cette dernière égalité signifie que

$$\boxed{\text{Le quadrilatère } IG_1DJ \text{ est un parallélogramme.}}$$

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Donc le point G_2 qui est le milieu du segment $[ID]$ d'après la question précédente, est aussi le milieu du segment $[G_1J]$.

$$\boxed{G_2 \text{ est le milieu du segment } [G_1J].}$$

2) **(a)** Soit m un réel.

$$G_m \text{ existe } \Leftrightarrow 1+1+(m-2)+m\neq 0 \Leftrightarrow 2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0.$$

$$\boxed{E=\mathbb{R}^*.}$$

(b) Notons tout d'abord que si les points I, C et D étaient alignés, les droites (AB) et (CD) auraient en commun le point I et seraient en particulier coplanaires. Comme les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires, les points I, C et D ne sont pas alignés et ces trois points définissent donc bien un plan.

Soit m un réel non nul. D'après le théorème du barycentre partiel,

$$G_m=\text{bar}\{(A,1),(B,1),(C,m-2),(D,m)\}=\text{bar}\{(I,2),(C,m-2),(D,m)\}.$$

Le point G_m est donc un barycentre des trois points non alignés I, C et D et on sait alors que le point G_m appartient au plan (ICD).

$$\boxed{\text{Pour tout réel non nul } m\text{, le point } G_m \text{ appartient au plan (ICD).}}$$

(c) Soit m un réel non nul. On sait que pour tout point M de l'espace, on a

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+(m-2)\overrightarrow{MC}+m\overrightarrow{MD}=2m\overrightarrow{MG_m}.$$

Pour $M=J$, on obtient en particulier (puisque le point J est le milieu du segment [CD])

$$m\overrightarrow{JMG_m}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+(m-2)\overrightarrow{JC}+m\overrightarrow{JD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}+m(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD})\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}\right).$$

Ainsi, le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ ne dépend pas de m.

$$\boxed{\text{Le vecteur } m\overrightarrow{JG_m} \text{ est constant quand } m \text{ décrit } \mathbb{R}^*.}$$

(d) Puisque le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant, pour tout réel non nul m on a $m\overrightarrow{JG_m}=1.\overrightarrow{JG_1}$ ou encore

$$\text{pour tout réel non nul } m,\ \overrightarrow{JG_m}=\frac{1}{m}\overrightarrow{JG_1}.$$

Ainsi, le point G_m est sur la droite (JG_1).
Réciproquement, quand m décrit $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{m}$ décrit $\mathbb{R}^*$ et donc G_m décrit la droite (JG_1) privée du point J.

$$\boxed{F \text{ est la droite } (JG_1) \text{ privée du point J.}}$$

