Lycée H.P. Manouba 4ème Math 1 Année scolaire : 2010-2011	Epreuve de : Mathématiques Proposé par : Mr BEN ALI **DEVOIR DE SYNTHESE N°1** Date : 6 décembre 2010 Durée : 3 heures

N.B : La qualité de la rédaction, la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions, constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie.

Exercice n°1 : (3 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Il est seulement demandé de reproduire la bonne réponse sur votre copie. L'absence de réponse à une question ne sera pas pénalisée.

		A	B	C
1	Le chiffre des unités de 9^{2010} est	3	9	1
2	Si $x \equiv 2 \pmod 5$ et $x \equiv 2 \pmod 3$ alors	$x \equiv 4 \pmod{15}$	$x \equiv 2 \pmod{15}$	$x \equiv 0 \pmod{15}$
3	Si $3n \equiv n-1 \pmod 7$ alors	$n \equiv 4 \pmod 7$	$n \equiv 3 \pmod 7$	$n \equiv 2 \pmod 7$

Exercice n°2 : (5 points)

Soit f l'application definie par : $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$; $z \mapsto \dfrac{i}{\overline{z}} = Z'$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z'. on considère les points $A(-i)$ et $B(-1)$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = (\overline{z})^2$ .Donner solutions sous la forme algébrique

2) a- Montrer que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) [2\pi]$

b- En déduire que (OM) et (OM') sont perpendiculaires .

3) Soit $\mathscr{C}$ cercle de centre B et de rayon 1.

a- Montrer que $\left(\overline{Z' + i}\right) = -\dfrac{i}{z}(z+1)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$

b- En déduire que si M appartient à $\mathscr{C}\ \{O\}$ alors $|z' + i| = |z'|$.

c- En déduire que si M appartient à $\mathscr{C}\ \{O\}$ alors M' appartient à une droite D que l'on déterminera

4) Etant donné un point M de $\mathscr{C}\ \{O\}$, construire alors le point M'

5) a- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, déterminer : $z_1 = (f \circ f)(z)$

b- En déduire que les points M et M_1 d'affixes respectives z et z_1 sont symétriques par rapport à un point fixe que l'on déterminera.

© 2010 www.devoir@t.net

Exercice n°3 : (5 points)

Soit ABCD un rectangle tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB=2AD. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [DC] et soit $K=S_J(I)$

1) On pose $f=S_{IC}\circ t_{\overrightarrow{AB}}\circ S_{IJ}$

a/ Identifier l'application $S_{BC}\circ S_{IJ}$

b/ En déduire que f est une rotation que l'on caractérisera.

2) On pose $g=f\circ S_{IJ}$

a/ Déterminer $g(A)$, $g(D)$ et $g(I)$

b/ Démontrer que s'il existe un point M invariant par g, alors les droites (DI) , (IJ) et (DC) sont concourantes .

c/ Montrer alors que g est symétrie glissante

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct **(A, $\overrightarrow{AI}$,$\overrightarrow{AD}$).**

Soit l'application h : P → P ; M(z) → M'(z') tel que : z' = $i\bar{z}+1+i$.

a/ Montrer que h est une isométrie.

b/ Déterminer les affixes des points C ; J et K

c/Déterminer h(A) ; h(D) et h(I) . En déduire que $h=g$

d/ Déterminer alors l'axe Δ de g et son vecteur $\vec{u}$

Exercice n°4 : (8 points)

A / Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b/ Dresser le tableau de variation de f**.**

c/ Déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle I que l'on déterminera.

2) a/ Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique α et que $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

b/ Construire ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère

c/ Montrer que f^{-1} est dérivable à gauche de 1 et que : $\left(f^{-1}\right)'(1)=0$.

d/ Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$

3) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$.

b/ Montrer que pour tout $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ on a $\left|f'(x)\right|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

c/ En déduire que : $\left|u_{n+1}-\alpha\right|\le\frac{\sqrt{2}}{2}\left|u_n-\alpha\right|$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α .

B / Soit la fonction g définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=f\left[\tan(x)\right]$

1) Montrer que g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2) a/ Montrer que est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$

b/ Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur I .

c/ Montrer que g^{-1} est dérivable sur I et que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{-2x(1-x)}{x^4+(1-x)^4}$.

© 2010 www.devoir@t.net