Le plan P est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction f, définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x^2$

Le but du problème est de calculer l'aire A du domaine D suivant :

$$D = \{M(x, y) \in P \text{ tels que } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

Concrètement, D est la zone située entre la courbe C_f de f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. (Voir figure 1)

Pour calculer l'aire du domaine D, on l'encadre avec des rectangles. Un première série de rectangles (en grisés sur la figure 2), situés sous la courbe, de sorte que la somme de leurs aires soit inférieure à A. D'autres, plus grands (en blanc sur la figure 2) de sorte que la somme de leurs aires soit supérieure à A.

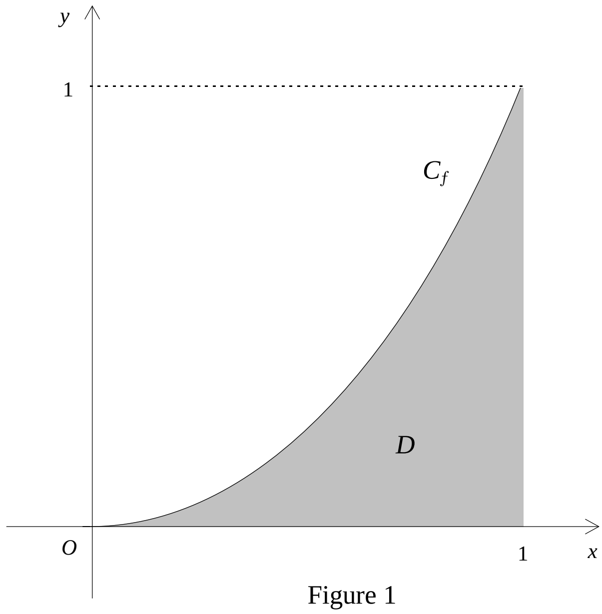

Figure 1

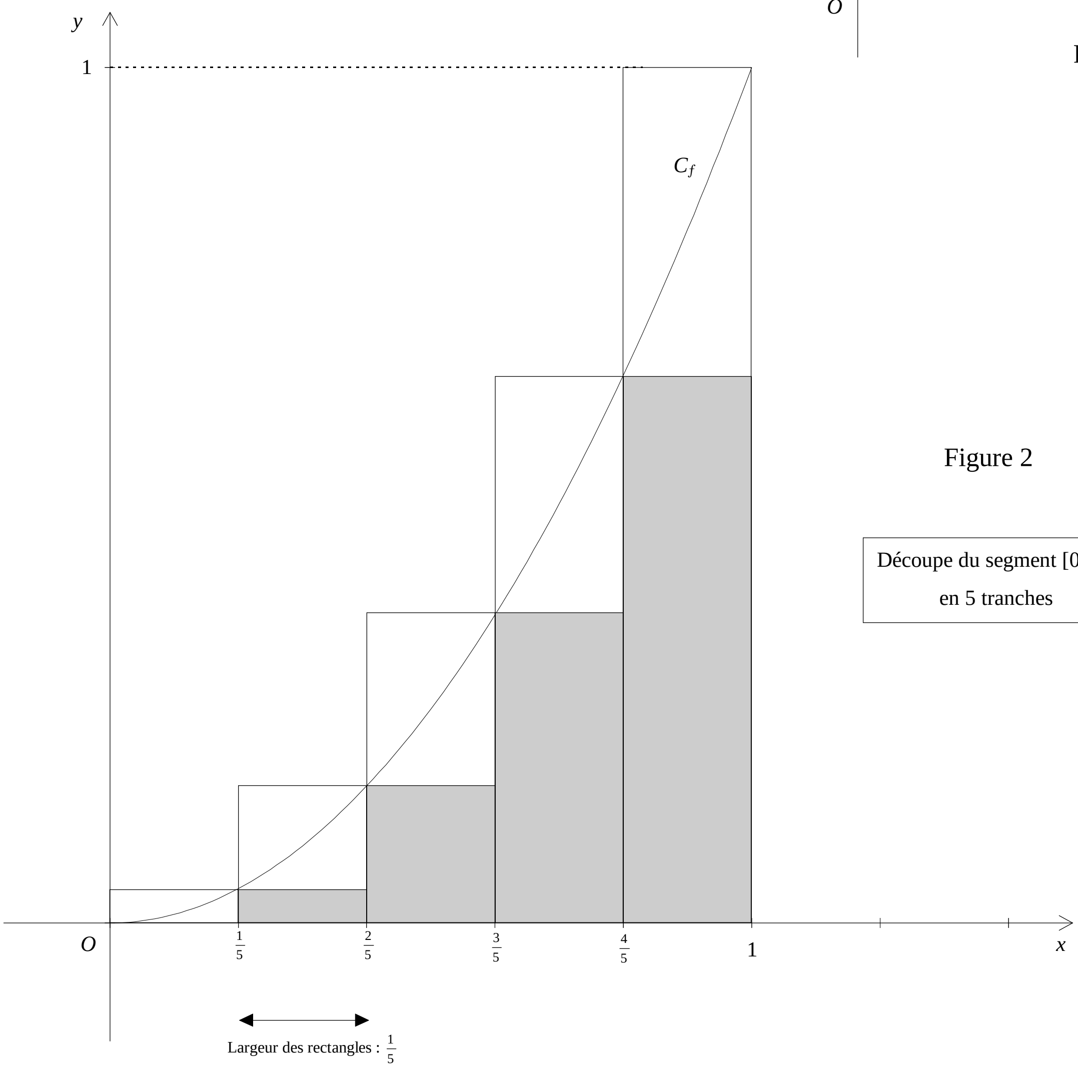

Figure 2

Découpe du segment [0 ; 1] en 5 tranches

1. À l'aide d'un raisonnement géométrique élémentaire, expliquer pourquoi l'aire A du domaine D vérifie :

$$A \leqslant \frac{1}{2}$$

2. À l'aide de la figure 2, démontrer que :

$$\frac{6}{25} \leqslant A \leqslant \frac{11}{25}$$

3. On se propose maintenant de découper le segment [0 ; 1] en n tranches d'égales longueurs puis d'étudier ce qui se passe lorsque n tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire lorsque la largeur des rectangles tend vers 0)

   Les n tranches sont donc :

$$\left[0\ ;\ \frac{1}{n}\right],\ \left[\frac{1}{n}\ ;\ \frac{2}{n}\right],\ \left[\frac{2}{n}\ ;\ \frac{3}{n}\right],\ ....,\ \left[\frac{n-1}{n}\ ;\ 1\right]$$

   Ce que l'on peut noter encore

$$\left[\frac{k}{n}\ ;\ \frac{k+1}{n}\right],\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

(Voir figure 3)

   a) À l'aide de la figure 3, compléter le tableau suivant :

Tranche	$\left[0\ ;\ \frac{1}{n}\right]$	$\left[\frac{1}{n}\ ;\ \frac{2}{n}\right]$	$\left[\frac{2}{n}\ ;\ \frac{3}{n}\right]$	...	$\left[\frac{k}{n}\ ;\ \frac{k+1}{n}\right]$	...	$\left[\frac{n-1}{n}\ ;\ 1\right]$
Hauteur des rectangles hachurés en	0			...		...	
Hauteur des rectangles hachurés en				...		...	

   b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, s_n la somme des aires des rectangles hachurés en et S_n la somme des aires des rectangles hachurés en .

   Ainsi, on a : $s_n \leqslant A \leqslant S_n$

   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_n = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + ... + k^2 + ... + (n-1)^2\right)$$

   Ce que l'on note encore : $$s_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

   Démontrer aussi que : $$S_n = s_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

   c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   d) En déduire la limite de la suite (S_n) et celle de la suite (s_n).

   Conclure.

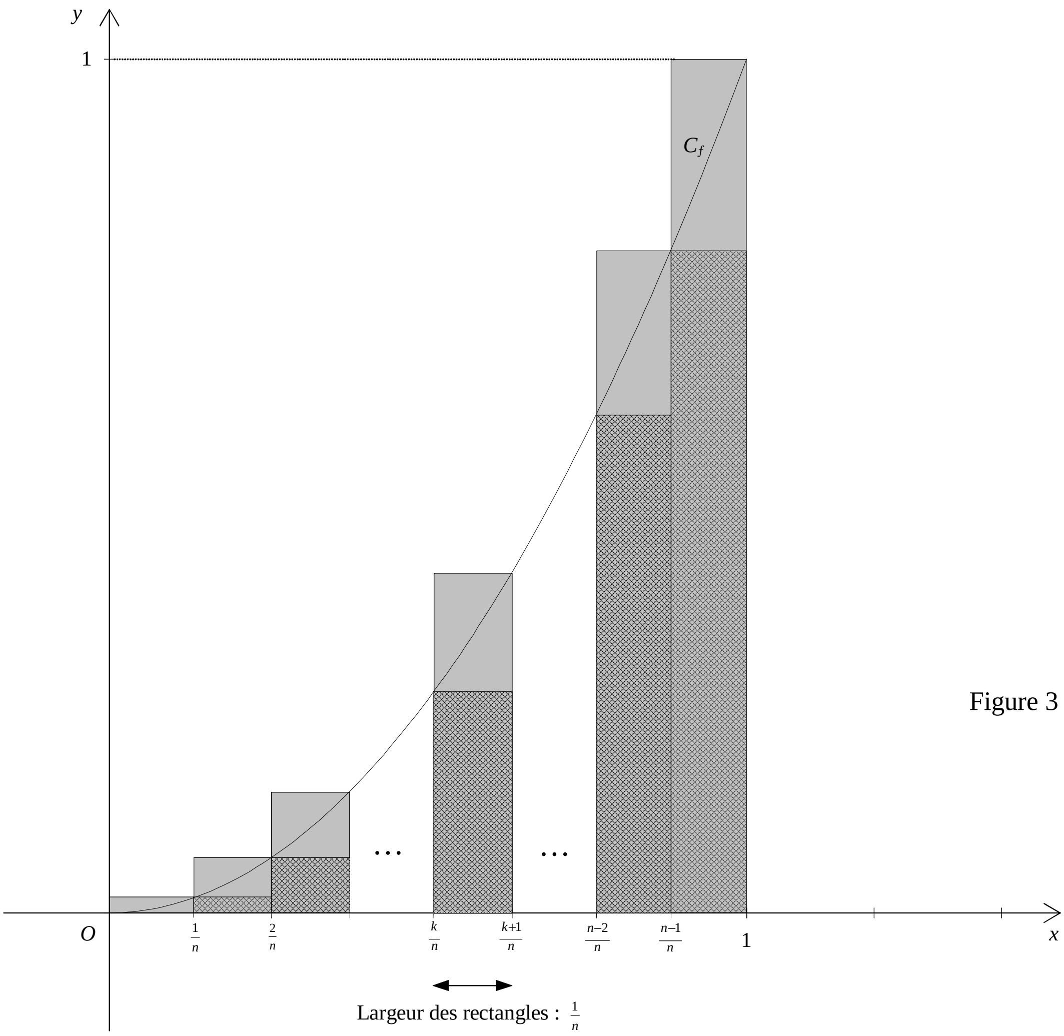
y
1
C_f
…
…
O
$\frac{1}{n}$
$\frac{2}{n}$
$\frac{k}{n}$
$\frac{k+1}{n}$
$\frac{n-2}{n}$
$\frac{n-1}{n}$
1
x
Largeur des rectangles : $\frac{1}{n}$

Figure 3

1. Le domaine D est entièrement contenu dans une moitié de carré (coupé en deux suivant une diagonale). Ce carré étant de côté 1, on a donc :

$$A \leqslant \frac{1}{2}$$

2. On calcule la somme des aires des quatre rectangles grisés (on la note s_5 pour avoir des notations compatibles avec la question 3). Ces rectangles ont tous pour largeur $\frac{1}{5}$. Leurs hauteurs respectives sont les images, par la fonction $t \longmapsto t^2$, des réels $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, d'où :

$$s_5 = \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) = \frac{6}{25}$$

On calcule, de même, la somme des aires des cinq grands rectangles blancs :

$$S_5 = \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1^2\right) = \frac{11}{25}$$

Comme les rectangles grisés sont entièrement contenus dans le domaine D qui, lui-même, est entièrement contenu dans les grands rectangles blancs, on a bien :

$$\frac{6}{25} \leqslant A \leqslant \frac{11}{25}$$

3. La hauteur de chaque rectangle est l'image, par la fonction $t \longmapsto t^2$, de la borne inférieure (pour) ou la borne supérieure (pour).

a) On a donc :

Tranche	$\left[0\,;\frac{1}{n}\right]$	$\left[\frac{1}{n}\,;\frac{2}{n}\right]$	$\left[\frac{2}{n}\,;\frac{3}{n}\right]$	...	$\left[\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}\right]$	...	$\left[\frac{n-1}{n}\,;1\right]$
Hauteur des rectangles hachurés en	0	$\left(\frac{1}{n}\right)^2$	$\left(\frac{2}{n}\right)^2$	...	$\left(\frac{k}{n}\right)^2$	...	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$
Hauteur des rectangles hachurés en	$\left(\frac{1}{n}\right)^2$	$\left(\frac{2}{n}\right)^2$	$\left(\frac{3}{n}\right)^2$	...	$\left(\frac{k+1}{n}\right)^2$	...	1

b) Comme la largeur des rectangles est égale à $\frac{1}{n}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$$

En factorisant par $\frac{1}{n^2}$ dans la grande parenthèse, il vient :

$$s_n = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + \ldots + (n-1)^2\right)$$

C'est-à-dire :
$$s_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

De même, on a :

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 1\right)$$

D'une part, on a :

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) + \frac{1}{n} \times 1 = s_n + \frac{1}{n}$$

D'autre part, en factorisant par $\frac{1}{n^2}$

$$S_n = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

c) On considère la propriété $\wp$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- On a $\wp(1)$ puisque $1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$. La propriété $\wp$ est donc initialisée au rang 1.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

  On a : $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

  Et d'après $\wp(n)$: $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

  En factorisant par $(n+1)$: $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)\left[(n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6}$$

  $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

  Ce qui est $\wp(n+1)$

  On a donc bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang 1.

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on en déduit :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\wp(n)$

C'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d) On déduit des questions b) et c) que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Calculons la limite de la suite (S_n). Pour cela, on écrit :

$$S_n = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Or, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6n^2} = 0$$

D'où, par somme : $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

Par ailleurs, on a vu que : $$s_n = S_n - \frac{1}{n}$$

On obtient donc, par somme : $$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{3}$$

Concluons : on a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_n \leqslant A \leqslant S_n$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{3}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que :

$$A = \frac{1}{3}$$

Conclusion : l'aire du domaine délimité par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\dfrac{1}{3}$.