Théorème du point fixe

Soit I un intervalle fermé non vide.

Soit $f : I \longrightarrow I$ une application contractante sur I.

Alors :

1) f admet un unique point fixe ℓ dans I.

2) $\forall u_0 \in I$, la suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers ℓ.

On peut remplacer l'hypothèse "$f : I \longrightarrow I$ contractante" par "$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contractante et telle que $f(I) \subset I$ "

On rappelle que "f contractante sur I " signifie :

$$\exists k \in [0, 1[,\ \forall (x, y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$$

Démonstration :

Remarquons au préalable que, u_0 étant dans I et I étant stable par f, la suite (u_n) est bien définie et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$$

Existence d'un point fixe :

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$\wp(n) : |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$$

- On a évidemment $\wp(0)$.
- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$:

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$. Alors :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \underset{f(I) \subset I}{\overset{f \text{ contractante}}{\leqslant}} k|u_{n+1} - u_n| \overset{\wp(n)}{\leqslant} k^{n+1}|u_1 - u_0|$$

  D'où $\wp(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \wp(n) : |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$$

Déduisons-en que (u_n) **est de Cauchy** :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $q > p \geqslant 0$.

Notons $r = q - p$.

On a :

$$|u_q - u_p| = |u_{p+r} - u_p| = \left| \sum_{i=p}^{p+r-1} u_{i+1} - u_i \right| \leqslant \sum_{i=p}^{p+r-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=p}^{p+r-1} k^i |u_1 - u_0|$$

Or :

$$\sum_{i=p}^{p+r-1} k^i |u_1 - u_0| = k^p |u_1 - u_0| \sum_{i=0}^{r-1} k^i$$

Et comme $k \in [0, 1[$, la série géométrique de terme général k^i converge et est majorée par $\dfrac{1}{1-k}$.

D'où : $$|u_q - u_p| \leqslant \frac{k^p}{1-k}|u_1 - u_0|$$

Et enfin, toujours parce que $k \in [0, 1[$: $$\frac{k^p}{1-k} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

En conséquence :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geqslant N \Rightarrow \frac{k^p}{1-k}|u_1 - u_0| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |u_q - u_p| \leqslant \varepsilon)$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est de Cauchy.

Et comme $\mathbb{R}$ est complet, (u_n) converge.

Notons ℓ sa limite. Comme I est fermé, on a $\ell \in I$.

Or, f est continue en ℓ (puisque contractante sur I) donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$$

$$\ell = f(\ell)$$

On a donc prouvé que f admet un point fixe ℓ dans I et que (u_n) converge vers ℓ.

Unicité du point fixe :

Supposons : $$\exists \ell, \ell' \in I, f(\ell) = \ell \text{ et } f(\ell') = \ell'$$

Comme f est contractante sur I : $$|f(\ell) - f(\ell')| \leqslant k|\ell - \ell'|$$

$$|\ell - \ell'| \leqslant k|\ell - \ell'|$$

$$(1-k)|\ell - \ell'| \leqslant 0$$

Or, $k \in [0, 1[$, donc : $$|\ell - \ell'| \leqslant 0$$

$$\ell = \ell'$$

Remarques :

- L'hypothèse "I fermé" n'est là que pour assurer $\ell \in I$. Si on sait déjà, par ailleurs, que $\ell \in I$ (en pratique, on a parfois déjà calculé ℓ en résolvant l'équation $f(\ell) = \ell$), cette hypothèse devient inutile.
- Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse "f contractante sur I " par l'hypothèse "f 1-lipschitzienne sur I ". Voici un contre-exemple :

  $I = [1, +\infty[$ $$f : I \longrightarrow I$$
  $$x \longmapsto x + \frac{1}{x}$$

  Soient x et y dans I avec $x < y$.

Comme f est croissante sur $[1, +\infty[$, on a :

$$|f(y) - f(x)| \leqslant f(y) - f(x) \leqslant y - x + \frac{x-y}{xy} \leqslant y - x \leqslant |y - x|$$

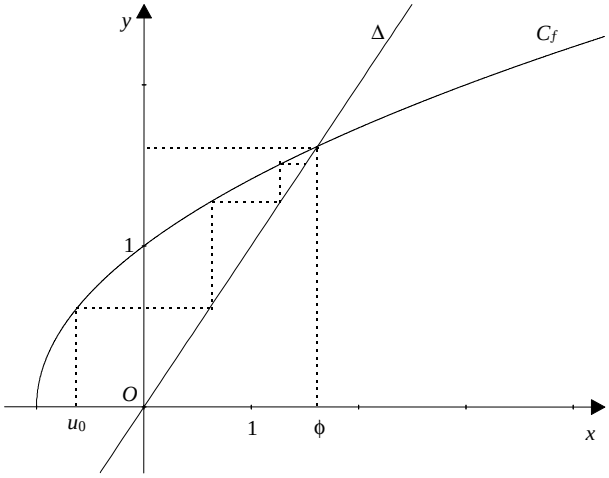
Ce qui prouve que f est 1-lipschitzienne sur I.

Cependant f n'a pas de point fixe sur I. (L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution)

Exemple :

Étudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$



On introduit l'application f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1+x}$$

Point fixe de f :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow x \geqslant 0 \text{ et } x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On montre facilement que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, croissante sur $[-1, +\infty[$, puis que :

$$f([-1, +\infty[) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[$$

L'intervalle $I = [-1, +\infty[$ est donc stable et la suite (u_n) est bien définie.

De plus : $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{2}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ |f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b - a|$$

Donc f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, donc contractante sur I.

En outre : $$f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+$$

Donc $\mathbb{R}_+$ est stable par f.

D'après le théorème du point fixe, la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ converge donc vers ϕ.

Enfin, si $u_0 \in [-1, 0]$ alors $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et d'après ce qui précède, (u_n) converge encore vers ϕ.