SUITES NUMÉRIQUES

1. Définition

<u>1.1. Définition</u>

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

La notation (u_n) désigne la suite et u_n désigne l'image de l'entier n (appelé encore terme d'indice n de la suite (u_n)).

2. Sens de variation (ou monotonie) d'une suite

<u>2.1. Définition</u>

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

La suite (u_n) est <u>croissante</u> (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

La suite (u_n) est <u>décroissante</u> (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

La suite (u_n) est <u>monotone</u> (à partir du rang n_0) si elle est croissante ou décroissante à partir du rang n_0.

La suite (u_n) est <u>stationnaire</u> (ou <u>constante</u> à partir du rang n_0) lorsque $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

<u>2.2. Trois techniques pour étudier la monotonie d'une suite</u> :

<u>2.2.1. Fonctionnelle</u> : utilisable pour les suites du type $u_n = f(n)$.

<u>Exemple</u> : $$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}$$

Considérons la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$$

Nous avons, pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$: $$f'(x) = \frac{18x}{\left(x^2+5\right)^2} > 0$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

En outre, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ (fonction rationnelle).

<u>2.2.2. Algébrique</u>

<u>Exemple 1</u> : $$u_n = 2n + \sin n.$$

Étudions, pour tout entier n, le signe de la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + \sin(n+1) - 2n - \sin n = 2 + \sin(n+1) - \sin n$$

Or : $$-1 \leqslant \sin(n+1) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant -\sin n \leqslant 1$$

donc $$-2 \leqslant \sin(n+1) - \sin n \leqslant 2$$

Par conséquent : $$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

<u>Exemple 2</u> : $$u_n = \frac{2^n}{n^2} \text{ pour } n \geqslant 1$$

La suite (u_n) à termes STRICTEMENT POSITIFS.

Évaluons, pour tout $n \geqslant 1$, la situation du quotient de deux termes consécutifs par rapport à 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = 2 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

Recherchons s'il existe des valeurs de l'entier n pour lesquelles le quotient ci-dessus est supérieur à 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2} \iff \frac{n}{n+1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sqrt{2}\, n \geqslant n+1 \iff (\sqrt{2}-1)n \geqslant 1 \underset{\sqrt{2}-1>0}{\iff} n \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \iff n \geqslant \sqrt{2}+1$$

Or n est un entier ; le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou égal à 1 si et seulement si n est supérieur ou égal à 3.

Comme la suite (u_n) est à termes positifs, il vient $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour $n \geqslant 3$.

La suite (u_n) est croissante pour $n \geqslant 3$.

<u>Note</u> : si l'on a pronostiqué le résultat (avec une calculatrice par exemple), on peut alors rédiger une solution plus courte : pour $n \geqslant 3$, on a :

$$1 + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{n+1}{n} \leqslant \frac{4}{3}$$

Par passage à l'inverse, il vient : $\frac{n}{n+1} \geqslant \frac{3}{4}$ (inégalité entre nombres positifs)

En élevant au carré, il vient : $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \geqslant \frac{9}{16}$

D'où : $2 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \geqslant \frac{18}{16} \geqslant 1$

Même conclusion que précédemment.

Notons, au passage, que puisque $u_3 = \frac{8}{9}$ est le plus petit terme de la suite, on a : (u_n) minorée.

<u>Exemple 3</u> : cas d'une suite définie par une somme : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, pour $n \geqslant 1$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

Donc (u_n) est strictement croissante.

<u>2.2.3. Par récurrence</u> : pratique pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 16 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

Démontrons par récurrence que cette suite est décroissante.

On considère la propriété $\wp$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

- On a $u_1 = 4$ donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$, d'où $\wp(0)$. Donc $\wp$ est initialisée au rang 0.
- Montrons que $\wp$ est héréditaire à partir du rang 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

Alors, par croissance de l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$, nous avons :

$$0 \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$$

$$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

D'où $\wp(n+1)$.

La propriété $\wp$ est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0, donc d'après le principe de raisonnement par récurrence, elle est vraie à tout rang n :

$$\text{pour tout } n \geqslant 0, \text{ on a } u_{n+1} \leqslant u_n$$

La suite (u_n) est bien décroissante.

3. Suite majorée, suite minorée, suite bornée

3.1. Définition

Une suite (u_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que $u_n \leqslant M$ pour tout entier n.

Une suite (u_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que $m \leqslant u_n$ pour tout entier n.

Une suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est minorée et majorée.

3.2. Trois techniques :

3.2.1. Algébrique : manipulation d'inégalités

Exemple 1 : $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$, pour $n \geqslant 1$

On a : $-2 \leqslant (-1)^n + \sin n \leqslant 2$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2} \leqslant 1$ $(n \geqslant 1)$

D'où : $-2 \leqslant u_n \leqslant 2$

La suite (u_n) est bornée.

Exemple 2 : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, pour $n \geqslant 1$

Montrer que (u_n) est majorée par 2.

En remarquant que, pour $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

On a :

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

Exemple 3 : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Montrer que (u_n) est majorée par 3.

Montrons tout d'abord, par récurrence, la propriété $\wp$, définie pour $k \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(k) : k! \geqslant 2^{k-1}$$

- On a évidemment $\wp(1)$. La propriété $\wp$ est initialisée au rang 1.
- Montrons que $\wp$ est héréditaire à partir du rang 1.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(k)$: $\qquad k! \geqslant 2^{k-1}$

Alors on a

$$(k+1)! = (k+1) \times k! \geqslant (k+1)\, 2^{k-1}$$

Et comme $(k+1) \geqslant 2$: $\qquad (k+1)! \geqslant 2^k$

Ce qui est $\wp(k+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$k! \geqslant 2^{k-1} \text{ pour tout } k \geqslant 1$$

On peut donc écrire : $\qquad u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$

Or : $\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leqslant 2$

D'où, en ajoutant 1 : $\qquad u_n \leqslant 3$

<u>3.2.2. Fonctionnelle</u>

<u>Exemple</u> : $\qquad u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}$

On a déjà vu (plus haut) que (u_n) est croissante (pour $n \geqslant 0$) et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Comme $u_0 = \frac{1}{5}$, on en déduit que : $\qquad \frac{1}{5} \leqslant u_n \leqslant 2$

La suite (u_n) est bornée.

<u>3.3.3. Par récurrence</u>

<u>Exemple</u> : $\qquad u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$ avec $u_0 = 0$

On considère la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 3$$

- Par hypothèse, on a $\wp(0)$. La propriété est initialisée au rang 0.
- Montrons que $\wp$ est héréditaire à partir du rang 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 3$

Alors, en ajoutant 6 : $\qquad 6 \leqslant 6 + u_n \leqslant 9$

Par passage à la racine carrée (qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\sqrt{6} \leqslant \sqrt{6+u_n} \leqslant 3$$

Donc : $\qquad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

<u>Conclusion</u> : pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $\qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 3$

4. Suite convergente

4.1. Définition

On dit qu'une suite est convergente vers un réel ℓ (ou admet une limite finie ℓ) lorsque tout intervalle ouvert I centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarque : mathématiquement, une suite (u_n) admet une limite finie ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

Autrement dit :

Pour tout réel ε strictement positif, il existe un certain rang N tel qu'à partir de ce rang on ait : $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$

Autrement dit :

Tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice

Heureusement, nous disposons de théorèmes (voir ci-dessous) pour prouver la convergence d'une suite dont l'emploi est bien plus aisé que cette définition.

Il existe des suites qui ne convergent pas (on dit alors qu'elles divergent). Il y en a de deux types :

Celles qui ont une limite infinie : par exemple $u_n = n$.

Celles qui n'ont pas de limite : par exemple $u_n = (-1)^n$. ($u_{2p} = 1$ et $u_{2p+1} = -1$)

Notons que cette suite est bornée mais ne converge pas. Par contre, toute suite convergente est nécessairement bornée.

4.2. Deux techniques pour montrer qu'une suite est convergente :

4.2.1. Cas des suites du type $u_n = f(n)$: les théorèmes énoncés sur les limites de fonctions s'appliquent

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Exemples :

Avec le théorème des "gendarmes" : soit $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Étudions la limite de la suite (u_n) :

On a : $n^2 < n^2 + 1$.

En outre, $n^2 + 1 < (n + 1)^2$. (En effet, $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 + 1$ car $2n > 2 > 0$)

On a donc l'encadrement suivant : $n^2 < n^2 + 1 < (n + 1)^2$

Par passage à la racine (tous les membres sont positifs), il vient :

$$n < \sqrt{n^2+1} < n + 1$$

Puis en divisant par n (positif) : $1 < u_n < 1 + \dfrac{1}{n}$

Comme $\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$, on en déduit (théorème des gendarmes) que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Avec les théorèmes de comparaison : soit $u_n = n^4(\cos n - 2)$. Étudions la limite de la suite (u_n) :

Comme $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, on a : $-3 \leqslant \cos n - 2 \leqslant -1$, donc $u_n \leqslant -n^4$.

Or $\lim_{n\to+\infty} (-n^4) = -\infty$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. (On dit alors que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$)

Cas d'une suite définie par une somme : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geqslant 1$.

Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(t) = \ln t$.

Soit $x \in]0 ; +\infty[$. Considérons l'intervalle $I = [x ; x + 1]$. La fonction f est dérivable sur I et $f'(t) = \frac{1}{t}$.

Pour tout $t \in I = [x ; x + 1]$, on a : $\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}$ (car la fonction inverse est décroissante sur $I \subset]0 ; +\infty[$)

C'est-à-dire : $\frac{1}{x+1} \leqslant f' \leqslant \frac{1}{x}$ sur I.

D'après l'inégalité des accroissements finis appliqué à f et en choisissant $a = x$ et $b = x + 1$, nous obtenons :

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}.$$

En particulier, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $\frac{1}{x} \geqslant \ln(k + 1) - \ln k$.

On en déduit que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n + 1)$.

Or, la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(n + 1)$ est divergente vers $+\infty$. On en déduit par comparaison que (u_n) diverge également vers $+\infty$.

Exercice : l'affirmation "une suite qui diverge vers $+\infty$ est nécessairement croissante" est-elle vraie ?

Réponse : non ! Considérer : $u_n = (-1)^n + n$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant -1 + n$ donc, par comparaison, (u_n) diverge vers $+\infty$.

Cependant (u_n) n'est pas croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + n + 1 - (-1)^n - n = (-1)^{n+1}(1 + 1) + 1 = 2(-1)^{n+1} + 1 = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

Exercice : démontrer que les suites $(\sin n)$ et $(\cos n)$ divergent.

Supposons que la suite $(\cos n)$ converge vers un certain réel $\ell \in [-1, 1]$.

De la relation $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$, on déduirait la convergence de la suite $(\sin n)$ vers $\pm\sqrt{1-\ell^2}$.

On sait que : $\cos(2n) = \cos^2 n - \sin^2 n$

En passant à la limite, on aurait : $\ell = \ell^2 - (1 - \ell^2)$

D'où : $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$

$$\ell = 1 \text{ ou } \ell = -\frac{1}{2}$$

En outre, on sait que : $\sin(2n) = 2 \cos n \sin n$

En passant à la limite, on aurait : $\sqrt{1-\ell^2} = 2\ell\sqrt{1-\ell^2}$

$$\sqrt{1-\ell^2}\ (1-2\ell)=0$$

$$\ell = 1 \text{ ou } \ell = \frac{1}{2}$$

La seule possibilité commune est $\ell = 1$.

Mais on sait également que : $\cos(n+1) = \cos n \sin 1 - \sin n \cos 1$

En passant à la limite : $\ell = \ell \sin 1 - \sqrt{1-\ell^2}\cos 1$

D'où : $1 = \sin 1$, ce qui est absurde car $\sin 1 < 1$ (puisque $1 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$)

Donc les suites $(\cos n)$ et $(\sin n)$ divergent.

4.2.2. Suites récurrentes

On applique le théorème suivant :

Théorème (convergence monotone) :

1. Toute suite croissante et majorée converge.
2. Toute suite décroissante et minorée converge.

Démonstration : hors-programme (propriété de la borne supérieure)

Montrons le 1 (le 2 se faisant de manière analogue)

Soit (u_n) une suite croissante et majorée. Soit M un de ses majorants :

$$u_n \leqslant M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

L'ensemble $\{u_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Notons ℓ sa borne supérieure. On a donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant \ell$$

Mais la suite (u_n) est croissante et majorée par ℓ, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \ell)$$

D'où : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $(n \geqslant n_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell)$

Et par passage à la limite (lorsque ε tend vers 0) le théorème des gendarmes permet d'affirmer que :

la suite (u_n) admet une limite et cette limite est ℓ.

Notons que le théorème n'indique pas vers quel réel la suite converge. (Ce réel est parfois très difficile à déterminer). On a cependant la propriété suivante :

Si f est continue et si (u_n) est une suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Alors, sa limite éventuelle ℓ est nécessairement solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemples d'utilisation du théorème :

- La suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, pour $n \geqslant 1$ est croissante et majorée (voir plus haut) donc convergente.

  (Sa limite est difficile à déterminer, elle vaut $\frac{\pi^2}{6}$)

- La suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est croissante et majorée donc convergente. On montrera (voir sujet bac blanc) que sa limite est le nombre **e.**

5. Cas des suites du type $u_n = a^n$ (suites géométriques de raison a et de premier terme $u_0 = 1$)

5.1. Théorème

La suite (u_n) définie par $u_n = a^n$ possède les propriétés suivantes :

- si $a > 1$, alors (u_n) est strictement croissante et diverge vers $+\infty$
- si $a = 1$, alors (u_n) est constante et converge vers 1
- si $0 < a < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante et converge vers 0
- si $a = 0$, alors (u_n) est constante et converge vers 0
- si $-1 < a < 0$, alors (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante (les signes alternent) mais (u_n) converge vers 0
- si $a \leqslant -1$, alors (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante (les signes alternent) et (u_n) diverge (pas de limite).

Démonstration : tous ces résultats se démontrent en écrivant $|a|^n = \mathbf{e}^{n \ln |a|}$ lorsque $a \neq 0$.

Supposons $a > 0$: dans ce cas, on a : $a^n = \mathbf{e}^{n \ln a}$. Posons, pour $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = a^x = \mathbf{e}^{x \ln a}$. Ainsi : $f'(x) = \ln a\, \mathbf{e}^{x \ln a}$.

Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$.

Dans ce cas : $f'(x) > 0$. Donc (u_n) est strictement croissante. (On pouvait aussi utiliser : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a > 1$...)

Et : $\lim_{x \to +\infty} \mathbf{e}^{x \ln a} = +\infty$. Donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

Si $a = 1$, alors $\ln a = 0$.

Dans ce cas : $f'(x) = 0$. Donc (u_n) est constante. (On pouvait aussi utiliser : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a = 1$...)

Et : $\lim_{x \to +\infty} \mathbf{e}^{x \ln a} = 1$. Donc (u_n) converge vers 1.

Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$.

Dans ce cas : $f'(x) < 0$. Donc (u_n) est strictement décroissante. (On pouvait aussi utiliser : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a < 1$...)

Et : $\lim_{x \to +\infty} \mathbf{e}^{x \ln a} = 0$. Donc (u_n) converge vers 0.

Supposons $a = 0$: dans ce cas : $a^n = 1$, donc (u_n) est constante et converge vers 0.

Supposons $a < 0$:

Sens de variation :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = a^{n+1} - a^n = a^n(a - 1)$

Or, $a - 1 < 0$ car $a < 0$ et a^n est positif si n pair et négatif si n impair.

Par conséquent, $u_{n+1} - u_n$ est de signe **non constant**. Donc (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

Convergence :

Si $-1 < a < 0$, alors $\ln |a| < 0$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} |a|^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{e}^{n \ln |a|} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.

La suite (u_n) converge vers 0.

Si $a \leqslant -1$, alors $\ln |a| \geqslant 0$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} |a|^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{e}^{n \ln |a|} \neq 0$. Notons ℓ cette limite non nulle.

Or, $a^n = (-1)^n|a^n|$. Donc la suite (u_{2n}) converge vers ℓ et la suite (u_{2n+1}) converge vers $-\ell$.

La suite (u_n) n'a donc pas de limite, dans ce cas.

Exemples :

- Soit $u_n = (2 + n)^n$. On a $(2 + n)^n \geqslant 2^n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ (théorème 1), donc la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$. Chaque terme de la suite (u_n) est la somme des $(n + 1)^{\text{èmes}}$ termes d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $P = 1$. On a donc :

$$u_n = \frac{P(1-q^N)}{1-q} = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ (théorème 1) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

- Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{e}^{-k}$.

On a :
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}^{-k} = \frac{1}{\mathbf{e}} \frac{1-\left(\frac{1}{\mathbf{e}}\right)^n}{1-\frac{1}{\mathbf{e}}} = \frac{1-\left(\frac{1}{\mathbf{e}}\right)^n}{\mathbf{e}-1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\mathbf{e}}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{\mathbf{e}} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{e}^{-k} = \frac{1}{\mathbf{e}-1}$

5.2. Généralisation : limite de la somme des termes d'une suite géométrique :

Soit $q \in\ ]-1 ; +\infty[$. Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n} q^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } q \geqslant 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{si } |q| < 1 \end{cases}$

Pour le démontrer, il suffit d'écrire que : $\sum\limits_{p=0}^{n} q^p = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ puis d'utiliser le théorème 1.

Exercice : démontrer que pour tout $x \in [0 ; 1[$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n} \left(-x^a\right)^p = \frac{1}{1+x^a}$

6. Croissances comparées des suites (ln n) ; (n^α) ; (a^n)

Motivation : on considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \frac{1{,}15^n}{n^2}$.

a) Calculer u_0, u_1, ... , u_{10}. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

b) Calculer u_{25} et u_{50}. La conjecture faite en a) est-elle correcte ?

c) Calculer $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe. En déduire que pour $n \geqslant 13$, la suite (u_n) est croissante.

<u>6.1.Théorème</u>

Pour tout réel $\alpha > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{\ln n} = +\infty$

Pour tous réels $a > 1$ et $\alpha > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$

Pour tout réel a tel que $0 < a < 1$ et tout réel α : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = 0$

<u>Démonstration</u> :

- $\dfrac{n^\alpha}{\ln n} = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha \ln n}}{\ln n} \underset{N=\alpha\ln n}{=} \alpha \dfrac{\mathrm{e}^N}{N}$

  Lorsque n tend vers $+\infty$, N tend aussi vers $+\infty$ (car $\alpha > 0$).

  En outre, $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^N}{N} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{\ln n} = +\infty$.

- $\dfrac{a^n}{n^\alpha} = \dfrac{\mathrm{e}^{n\ln a}}{\mathrm{e}^{\alpha\ln n}} = \mathrm{e}^{n\ln a - \alpha\ln n} = \mathrm{e}^{n\left(\ln a - \alpha\frac{\ln n}{n}\right)}$.

  Or , $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln a - \alpha\dfrac{\ln n}{n}\right) = \ln a > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\ln a - \alpha\dfrac{\ln n}{n}\right) = +\infty$

  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\left(\ln a - \alpha\frac{\ln n}{n}\right)} = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.

- Cette fois-ci, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln a - \alpha\dfrac{\ln n}{n}\right) = \ln a < 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\ln a - \alpha\dfrac{\ln n}{n}\right) = -\infty$

  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\left(\ln a - \alpha\frac{\ln n}{n}\right)} = 0$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = 0$.

<u>Exemple</u> :

Soit $u_n = 3^n - n^4$. Étudier la limite de la suite (u_n).

Écrivons que $3^n - n^4 = 3^n\left(1 - \dfrac{n^4}{3^n}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{n^4} = +\infty$ (théorème 2), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^4}{3^n} = 0$

En outre, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

7. Récurrence double

<u>Exemple</u>: soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$; $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Démontrer que $u_n = 2^n$ pour tout entier n.

On vérifie que la propriété est vraie pour u_2 et u_3 :

$$u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 10 - 6 = 4 = 2^2 \ ; \ u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 20 - 12 = 8 = 2^3$$

On suppose que $u_n = 2^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+1}$. Montrons qu'alors $u_{n+2} = 2^{n+2}$:

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5\times 2^{n+1} - 6\times 2^n = 5\times 2\times 2^n - 6\times 2^n = 4\times 2^n = 2^{n+2}$$

Conclusion : $u_n = 2^n$ pour tout n.

Généralisation : étude des suites récurrentes d'ordre 2 à coefficients réels :

Ce sont les suites définies par : $\begin{cases} u_0 \\ u_1 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Méthode : on résout l'équation caractéristique : $r^2 = ar + b$.

- Si elle admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, alors : $u_n = A\left(\lambda_1^n\right) + B\left(\lambda_2^n\right)$
- Si elle admet une racine double λ, alors : $u_n = (An + B)\left(\lambda^n\right)$
- Si elle admet deux racines complexes conjuguées $\lambda = \rho\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ et $\overline{\lambda} = \rho\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}$ alors :

$$u_n = A\,\rho^n \cos(n\theta) + B\,\rho^n \sin(n\theta)$$

Les constantes A et B se déterminent à l'aide de u_0 et u_1.

Noter l'analogie avec les solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients réels.

Exemple : on considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$

Démontrer que : $u_n = \dfrac{1}{8}\times 3^n - \dfrac{3}{8}\times(-1)^n$. En déduire que (u_n) est croissante.

8. Suites adjacentes

8.1. Définition

On dit que deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes lorsque :

- (a_n) est croissante
- (b_n) est décroissante
- la suite $(b_n - a_n)$ est positive et $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$

8.2. Théorème

Si deux suite (a_n) et (b_n) sont adjacentes (avec $a_n \leqslant b_n$) alors elles convergent et ont même limite ℓ.

De plus, pour tout n on a : $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$.

Démonstration :

La suite (a_n) est croissante et majorée par b_0 (puisque $a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$ puisque (b_n) est décroissante) donc (a_n) converge (théorème de convergence monotone). Notons ℓ sa limite.

De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0 (puisque $a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ puisque (a_n) est croissante) donc (b_n) converge.

En écrivant : $b_n = (b_n - a_n) + a_n$, on a, par linéarité de la limite : $\lim b_n = 0 + \ell = \ell$.

Donc (a_n) et (b_n) ont même limite ℓ.

Enfin, on a nécessairement : $a_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, supposons le contraire :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \ell < a_{n_0}$$

Posons $\ell' = \dfrac{a_{n_0} + \ell}{2}$. ($\ell'$ est la moyenne de a_{n_0} et de ℓ et comme $\ell < a_{n_0}$, on a : $\ell < \ell' < a_{n_0}$).

Comme (a_n) est croissante, on a : $\forall n \geqslant n_0,\ \ell' < a_n$

Et par passage à la limite : $\ell' \leqslant \ell$

Ce qui contredit $\ell < \ell'$... Donc on a bien : $a_n \leqslant \ell$

On démontre, de même, que : $\ell \leqslant b_n$

<u>8.3. Application</u> : le nombre **e**

1. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ et $y_n = x_n + \dfrac{1}{nn!}$ sont adjacentes.
2. Déterminer sept décimales de leur limite **e**.
3. Démontrer que **e** est un nombre irrationnel.

Remarque : on peut également poser $y_n = x_n + \dfrac{1}{n!}$. Les calculs sont plus simples mais la convergence (vers **e**) plus lente.

<u>Solution</u> :

1. La suite (x_n) est croissante. (Déjà vu plus haut)

   Montrons que (y_n) est décroissante en calculant $y_{n+1} - y_n$:

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - x_n - \frac{1}{nn!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

   Donc (y_n) est décroissante.

   Enfin on a : $y_n - x_n = \dfrac{1}{nn!}$

   Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$

   Les suites (x_n) et (y_n) sont bien adjacentes donc admettent une limite commune (que l'on notera **e**)

2. On a donc, pour tout entier n : $x_n \leqslant \mathbf{e} \leqslant y_n$

   Il suffit de déterminer un entier n tel que : $\dfrac{1}{nn!} < 10^{-7}$

   $n = 10$ convient. Donc $\mathbf{e} \simeq x_{10}$ à 10^{-7} près.

   On obtient : $\mathbf{e} \simeq 2{,}7182818$ (à 10^{-7} près)

3. Supposons $\mathbf{e} \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe des entiers p et q tels que $\mathbf{e} = \dfrac{p}{q}$.

   On aurait en particulier : $x_q < \dfrac{p}{q} < y_q$.

   En réduisant au même dénominateur la somme $x_q = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{q!}$, on peut écrire : $x_q = \dfrac{a}{q!}$ où $a \in \mathbb{N}$.

   D'où : $\dfrac{a}{q!} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{a}{q!} + \dfrac{1}{qq!}$

En multipliant par $q!$: $$a < p(q-1)! < a + \frac{1}{q} < a + 1$$

L'entier $p(q-1)!$ serait compris strictement entre a et $a + 1$ qui sont des entiers consécutifs, ce qui est absurde. Donc $\mathbf{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.