SUITES DE NOMBRES RÉELS

1. Définition d'une suite

1.1. Définition

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

La notation (u_n) désigne la suite en tant qu'objet mathématique (que l'on note parfois tout simplement u) et u_n désigne l'image de l'entier n (appelé encore terme d'indice n de la suite (u_n)), terme que l'on pourrait noter $u(n)$ mais l'usage en a voulu autrement.

Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang, comme par exemple :

$$u_n = \frac{1}{n} \text{ définie pour } n \in \mathbb{N}^*$$

$$v_n = \sqrt{n-3} \text{ définie pour } n \geqslant 3$$

Notons que le domaine de définition est nécessairement du type $[\![n_0, +\infty [\![$ où $n_0 \in \mathbb{N}$.

$[\![n_0, +\infty [\![$ = ensemble des entiers n tels que $n \geqslant n_0$.

Il faut bien comprendre qu'il y a de multiples façons de définir une suite. Nous en rencontrerons principalement de deux types. Celles qui sont définies par une "relation de récurrence" et la donnée d'un ou plusieurs termes initiaux comme par exemple $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ (suite de Fibonacci). Et celles qui sont définies explicitement "en fonction de n" comme les deux exemples cités juste au-dessus. Les stratégies pour étudier les suites dépendront justement de leur type. Techniques fonctionnelles pour les suites de la forme $u_n = f(n)$ et techniques de récurrence pour les suites récurrentes.

2. Sens de variation (ou monotonie) d'une suite

2.1. Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- La suite (u_n) est croissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
- La suite (u_n) est strictement croissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
- La suite (u_n) est décroissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
- La suite (u_n) est strictement décroissante (à partir du rang n_0) lorsque $u_n > u_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
- La suite (u_n) est monotone (à partir du rang n_0) si elle est croissante ou décroissante à partir du rang n_0.
- La suite (u_n) est stationnaire s'il existe un entier n_0 tel que $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
- La suite (u_n) est constante lorsque $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier n du domaine de définition de (u_n).

Remarques :

- Pour comprendre la nuance entre une suite stationnaire et une suite constante, donnons un exemple.

  Notons E la partie entière d'un réel (par exemple $E(\pi) = 3$) et (u_n) la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

  $$u_n = E\left(\frac{1}{n}\right)$$

  On a $u_1 = E(1) = 1$, $u_2 = E(0{,}5) = 0$ puis pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 0$. La suite (u_n) est stationnaire (à partir du rang 2) mais non constante puisque $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$.

- Il existe des suites qui sont ni croissantes, ni décroissantes. Par exemple : $u_n = (-1)^n$.
- Il est tout à fait correct de dire qu'une suite est croissante sur l'intervalle $[\![n_0, +\infty[\![$ au lieu de dire qu'elle est croissante à partir du rang n_0.
- Contrairement aux fonctions de la variable réelle, on ne définit le sens de variation d'une suite que sur des intervalles de la forme $[\![n_0, +\infty[\![$; ce qui se passe pour les premiers termes reste, ici, anecdotique.

2.2. Techniques d'étude de la monotonie d'une suite :

2.2.1. Technique fonctionnelle : utilisable pour les suites du type $u_n = f(n)$.

> 2.2.1. Théorème *Où l'on utilise le sens de variation de la* ***fonction associée***
>
> Soit (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle du type $\mathbf{[}a\,;+\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_+$.
>
> Si la fonction f est monotone sur $\mathbf{[}a\,;+\infty[$ alors la suite (u_n) est monotone sur $[\![E(a)+1\,;+\infty[\![$ et possède le même sens de variation que f.

Démonstration :

Supposons f croissante sur $\mathbf{[}a\,;+\infty[$. (Les autres cas se prouvent de manière analogue)

Le symbole $\mathbf{[}$ signifie que l'intervalle peut être ouvert ou fermé.

Soit $n \in [\![E(a)+1\,;+\infty[\![$. Comme f est croissante sur $[E(a)+1\,;+\infty[$, on a alors :

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) \geqslant 0$$

Donc (u_n) est croissante sur $[\![E(a)+1\,;+\infty[\![$.

De même, la stricte monotonie de f entraîne celle de (u_n).

Exemple 1 : soit (u_n) la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = \cos\frac{\pi}{n}$$

Notons f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $\quad f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$

La fonction f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x}$$

Or, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, on a : $\quad \dfrac{\pi}{x} \in \,]0\,;\pi[$

Et donc : $\quad \sin\dfrac{\pi}{x} \geqslant 0$

D'où : $\quad f'(x) \geqslant 0$

Donc f est croissante sur $[1\,;+\infty[$. En conséquence, la suite (u_n) est croissante pour $n \geqslant 1$.

Exemple 2 : $$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}$$

Considérons la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$$

La fonction f est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{18x}{\left(x^2+5\right)^2} \geqslant 0$$

La dérivée f' est strictement positive sur $]0\ ;+\infty[$ et s'annule en 0, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$. Par conséquent, la suite (u_n) est donc strictement croissante.

2.2.2. Techniques algébriques

C'est l'utilisation pure et simple de la définition :

$$(u_n) \text{ est croissante à partir du rang } n_0 \iff \text{ pour tout } n \geqslant n_0 \text{ on a } u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

Exemple 1 : $$u_n = 2n + \sin n$$

Étudions, pour tout entier n, le signe de la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + \sin(n+1) - 2n - \sin n = 2 + \sin(n+1) - \sin n$$

Or : $$-1 \leqslant \sin(n+1) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant -\sin n \leqslant 1$$

En ajoutant membre à membre : $$-2 \leqslant \sin(n+1) - \sin n \leqslant 2$$

Par conséquent : $$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

Variante : soit (u_n) une suite à termes STRICTEMENT POSITIFS.

Si, pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Si, pour tout entier n, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple 2 : $$u_n = \frac{2^n}{n^2} \text{ pour } n \geqslant 1$$

La suite (u_n) à termes STRICTEMENT POSITIFS.

Évaluons, pour tout $n \geqslant 1$, la situation du quotient de deux termes consécutifs par rapport à 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = 2 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

Recherchons s'il existe des valeurs de l'entier n pour lesquelles le quotient ci-dessus est supérieur à 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2} \underset{(2)}{\iff} \frac{n}{n+1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sqrt{2}\, n \geqslant n+1 \iff (\sqrt{2}-1)\, n \geqslant 1 \underset{(5)}{\iff} n \geqslant \sqrt{2}+1$$

L'équivalence (2) est justifiée par la croissance de l'application $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$. L'équivalence (5) est obtenue à l'aide de l'identité $(\sqrt{2}-1)\,(\sqrt{2}+1) = 1$.

Or n est un entier ; le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou égal à 1 si et seulement si n est supérieur ou égal à 3.

Comme la suite (u_n) est à termes strictement positifs, il vient $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour $n \geqslant 3$.

La suite (u_n) est croissante pour $n \geqslant 3$.

Note : si l'on a pronostiqué le résultat (avec une calculatrice par exemple), on peut alors rédiger une solution plus courte : pour $n \geqslant 3$, on a :

$$1 + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{n+1}{n} \leqslant \frac{4}{3}$$

Par passage à l'inverse, il vient : $\dfrac{n}{n+1} \geqslant \dfrac{3}{4}$ (inégalité entre nombres positifs)

En élevant au carré, il vient : $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 \geqslant \dfrac{9}{16}$ (croissance de $t \longmapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$)

D'où : $2 \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 \geqslant \dfrac{18}{16} \geqslant 1$

Même conclusion que précédemment.

Notons, au passage, que puisque $u_3 = \dfrac{8}{9}$ est le plus petit terme de la suite, on a : (u_n) minorée. (Voir plus bas)

Exemple 3 : **cas d'une suite définie par une somme**

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Nous reparlerons de cette suite à d'autres occasions.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$

Donc (u_n) est strictement croissante.

2.2.3. Technique par récurrence : pratique pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 16 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

Démontrons par récurrence que cette suite est décroissante.

On considère la propriété $\wp$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

- On a $u_1 = 4$ donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$, d'où $\wp(0)$. Donc la propriété $\wp$ est initialisée au rang 0.
- Montrons que $\wp$ est héréditaire à partir du rang 0.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

  Alors, par croissance de l'application $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$, nous avons :

$$0 \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$$

$$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

D'où $\wp(n+1)$.

La propriété $\wp$ est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0, donc d'après le principe de raisonnement par récurrence, elle est vraie à tout rang n :

$$\text{pour tout } n \geqslant 0, \text{ on a } u_{n+1} \leqslant u_n$$

La suite (u_n) est bien décroissante.

3. Suite majorée, suite minorée, suite bornée

3.1. Définition

Une suite (u_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que $u_n \leqslant M$ pour tout entier n.

Une suite (u_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que $m \leqslant u_n$ pour tout entier n.

Une suite (u_n) est bornée lorsqu'elle est minorée et majorée :

il existe des réels m et M tels que $m \leqslant u_n \leqslant M$ pour tout entier n

Remarque :

Une suite (u_n) est bornée si et seulement si il existe un réel M tel que $|u_n| \leqslant M$ pour tout entier n.

En effet, si (u_n) est bornée, il existe des réels a et b tels que pour tout entier n on ait :

$$a \leqslant u_n \leqslant b$$

Notons $M = \max(|a|\,;\,|b|)$. Comme $b \leqslant |b| \leqslant M$ et $-M \leqslant -|a| \leqslant a$, on obtient :

$$-M \leqslant u_n \leqslant M$$

D'où :

$$|u_n| \leqslant M$$

La réciproque est évidente.

3.2. Techniques pour prouver qu'une suite est majorée (ou minorée ou bornée) :

3.2.1. Technique algébrique : manipulation d'inégalités

Exemple 1 :

$$u_n = \frac{(-1)^n + \sin n}{n^2}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

On a :

$$-2 \leqslant (-1)^n + \sin n \leqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant 1 \ (n \geqslant 1)$$

D'où :

$$-2 \leqslant u_n \leqslant 2$$

La suite (u_n) est bornée.

Exemple 2 :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Nous reparlerons de cette suite à d'autres occasions.

Montrer que (u_n) est majorée par 2.

En remarquant que, pour $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On a :

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

Exemple 3 : $$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Nous reparlerons de cette suite à d'autres occasions.

Montrer que (u_n) est majorée par 3.

Montrons tout d'abord, par récurrence, la propriété $\wp$, définie pour $k \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(k) : k! \geqslant 2^{k-1}$$

- On a évidemment $\wp(1)$. La propriété $\wp$ est initialisée au rang 1.
- Montrons que $\wp$ est héréditaire à partir du rang 1.

  Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(k)$: $$k! \geqslant 2^{k-1}$$

  Alors on a : $$(k+1)! = (k+1) \times k! \geqslant (k+1)\,2^{k-1}$$

  Et comme $(k+1) \geqslant 2$: $$(k+1)! \geqslant 2^k$$

  Ce qui est $\wp(k+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$k! \geqslant 2^{k-1} \text{ pour tout } k \geqslant 1$$

On peut donc écrire : $$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

Or, par translation d'indice : $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On reconnaît une somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leqslant 2$$

D'où, en ajoutant 1 : $$u_n \leqslant 3$$

On a prouvé que la suite (u_n) est majorée par 3.

3.2.2. Technique fonctionnelle

Exemple : $$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}$$

Considérons la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$$

On a déjà vu, plus haut, que f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Par ailleurs, on a $f(0) = \frac{1}{5}$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$. La suite (u_n) est donc bornée par $\frac{1}{5}$ et 2.

On peut aussi retrouver ce résultat par la méthode algébrique. (Manipulation d'inégalités)

3.3.3. Technique par récurrence

Exemple : $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$ avec $u_0 = 0$

Montrer que cette suite est bornée.

Le calcul des premiers termes ($u_1 = \sqrt{6} \simeq 2{,}45$; $u_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}} \simeq 2{,}91$ et $u_3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} \simeq 2{,}98$) nous amène à considérer la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 3$$

- Par hypothèse, on a $\wp(0)$. La propriété est initialisée au rang 0.
- Montrons que $\wp$ est héréditaire à partir du rang 0.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

  Alors, en ajoutant 6 : $6 \leqslant 6 + u_n \leqslant 9$

  Par passage à la racine carrée (qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\sqrt{6} \leqslant \sqrt{6+u_n} \leqslant 3$$

  Donc : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

4. Comportement asymptotique d'une suite de réels

4.1. Définition *Suite convergente*

On dit qu'une suite converge (ou admet une limite finie) lorsqu'il existe un réel ℓ tel que :

tout intervalle ouvert I centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Lorsque (u_n) converge vers ℓ, on note alors : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Une suite non convergente est appelée suite divergente.

En formulant différemment cette définition, on obtient plusieurs variantes toutes équivalentes :

(u_n) converge lorsqu'il existe un réel ℓ tel que :

1) Tout intervalle $I =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
2) Pour tout réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang N à partir duquel tous les u_n vérifient $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.
3) Pour tout réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang N tel que pour tout indice n, on ait :

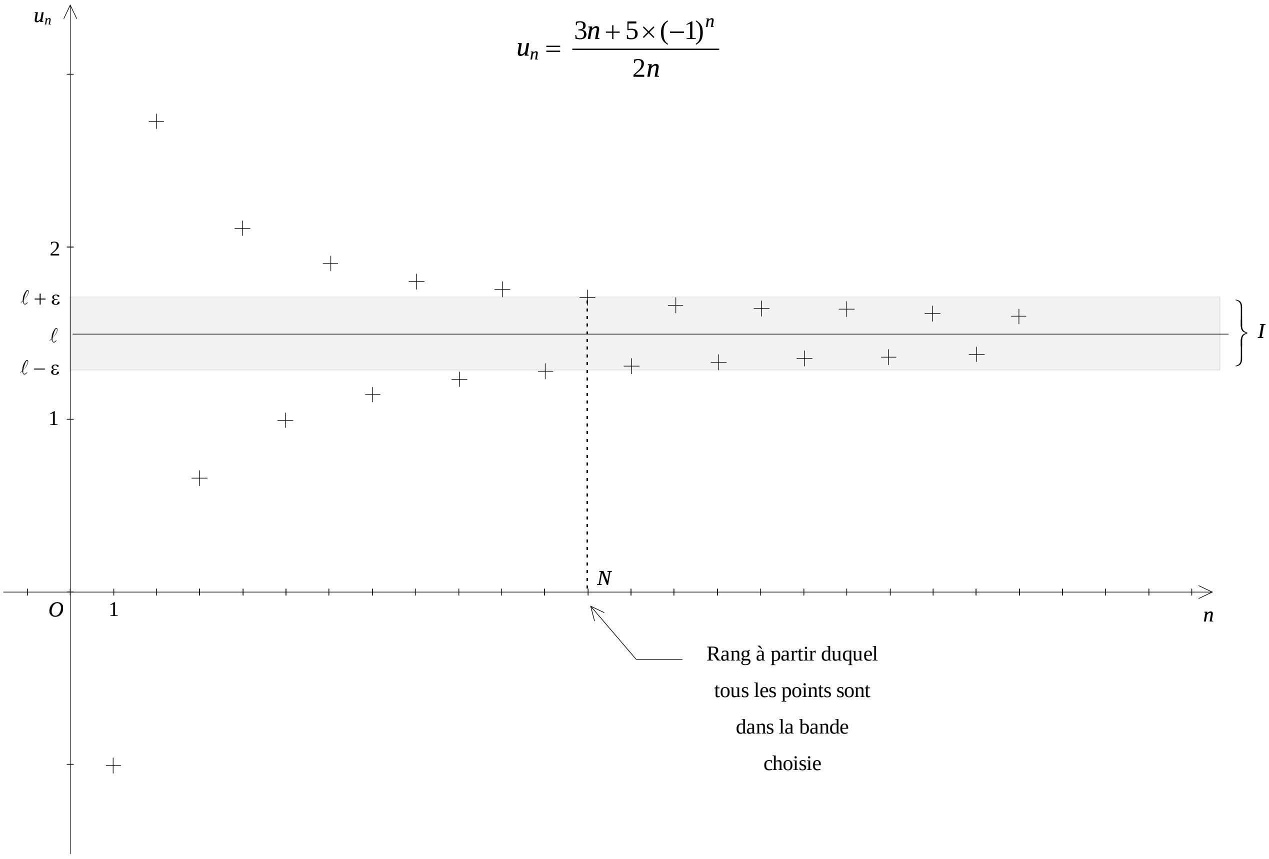
$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Lire : $n \geqslant N$ **implique** $|u_n - \ell| < \varepsilon$

Graphiquement, cela se traduit ainsi :

***Quelle que soit la largeur de la bande** horizontale choisie, **il existe un rang** (ou un indice) à partir duquel **tous** les points de la représentation graphique de la suite sont situés dans cette bande.*

Illustration avec la suite (u_n) définie par :



Sur cet exemple, le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{3}{2}$, ce que le théorème des gendarmes confirmera. (Voir 6.2.)

Remarque : on peut très bien travailler avec un intervalle I qui est fermé (et donc avec des inégalités larges).

4.2. Propriété *Unicité de la limite*

Si une suite (u_n) converge, alors sa limite ℓ est unique.

Démonstration

Raisonnons par l'absurde. Supposons que la suite (u_n) admette deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 < \ell_2$.

Notons $d = \ell_2 - \ell_1$.

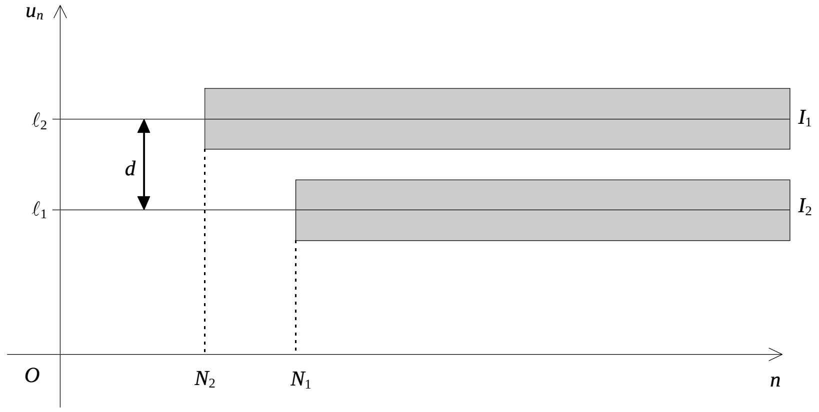
Comme (u_n) converge vers ℓ_1, à partir d'un certain rang N_1, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert I_1 de centre ℓ_1 et de rayon $\dfrac{d}{3}$.

De même, comme (u_n) converge vers ℓ_2, à partir d'un certain rang N_2, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert I_2 de centre ℓ_2 et de rayon $\dfrac{d}{3}$.

Donc à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, tous les termes de la suite sont simultanément dans I_1 et I_2. Or ces deux intervalles sont disjoints (ils ne se chevauchent pas). Ce qui n'est pas possible.

Ceci prouve l'unicité de la limite.

Illustration :



Comment, à partir du rang N_1, tous les termes de la suite pourraient-ils se situer dans ces deux "tuyaux" ?

4.3. Propriété

Si une suite (u_n) converge, alors (u_n) est bornée.

Démonstration

Notons ℓ la limite de la suite (u_n) et I l'intervalle $]\ell - 1, \ell + 1[$. I est bien un intervalle ouvert centré en ℓ.

Comme (u_n) converge, à partir d'un certain rang N, tous les termes de la suite (u_n) sont dans I. Autrement dit :

$$n \geqslant N \ \Rightarrow\ \ell - 1 < u_n < \ell + 1$$

- Si $N = 0$, alors c'est fini, (u_n) est bornée par les réels $\ell - 1$ et $\ell + 1$.
- Si $N \geqslant 1$, alors notons A l'ensemble $\{u_0, \ldots , u_{N-1}, \ell - 1, \ell + 1\}$, M le plus grand élément de A et m son plus petit élément. Ainsi (u_n) est bornée par les réels m et M.

Exercice : soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite convergeant vers 0.
Démontrer que la suite (u_nv_n) converge vers 0.

Cet exercice est très important car il permettra de démontrer que le produit de deux suites convergentes converge vers le produit des limites.

Solution :

Exploitons nos deux hypothèses :

1. Comme (u_n) est bornée, il existe un réel M tel que pour tout n :

$$|u_n| \leqslant M$$

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (v_n) converge vers 0, on aura à partir d'un certain rang N :

$$v_n \in \left]-\frac{\varepsilon}{M} ; \frac{\varepsilon}{M}\right[$$

C'est-à-dire : $$|v_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

D'où : $$|u_n|\,|v_n| < \frac{\varepsilon}{M} M \leqslant \varepsilon$$

C'est-à-dire : $$|u_nv_n| \in \,]-\varepsilon ; \varepsilon[$$

Ce qui prouve bien que la suite (u_nv_n) converge vers 0.

Étudions maintenant un cas spécial de suites divergentes :

4.4. Définition *Suite divergente vers $+\infty$*

On dit qu'une suite diverge vers $+\infty$ lorsque :

tout intervalle ouvert du type $]A, +\infty[$ (où $A > 0$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

En formulant différemment cette définition, on obtient plusieurs variantes toutes équivalentes :

(u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque :

1) Pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, l'intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

2) Pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang N tel que pour tout indice n, on ait :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n > A$$

On définit de même la divergence vers $-\infty$ à l'aide d'intervalles du type $]-\infty, A[$.

À l'aide de cette définition, on peut, par exemple, démontrer la propriété suivante :

Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$

En effet, si une suite (u_n) est non majorée, cela signifie que pour tout réel M, il existe un rang N tel que :

$$u_N > M$$

Et si, de plus, la suite est croissante, alors pour tout indice n tel que $n \geqslant N$, on aura $u_n \geqslant u_N$ donc :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n > M$$

Ce qui prouve bien que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice : **divergence vers $+\infty$ de la série harmonique**

On considère la suite H_n définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{(Série harmonique)}$$

Montrons que (H_n) diverge vers $+\infty$.

On remarque que : $$H_{2n} = H_n + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant H_n + n \times \frac{1}{2n} \geqslant H_n + \frac{1}{2}$$

Montrons par récurrence la propriété $\wp$, définie sur $k \in \mathbb{N}$, par :

$\wp(k)$: il existe un entier n tel que $H_n \geqslant k$

Comme $H_1 = 1$, on a $\wp(0)$ (et même $\wp(1)$).

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(k)$. Il existe donc un entier n tel que :

$$H_n \geqslant k$$

Mais d'après la remarque précédente : $H_{4n} \geqslant H_{2n} + \dfrac{1}{2} \geqslant H_n + 1 \geqslant k + 1$

Pour l'entier $m = 4n$, on a $H_m \geqslant k + 1$ d'où $\wp(k+1)$.

Donc la propriété $\wp$ est vraie pour tout entier k.

Autrement dit, quelque soit l'intervalle I de la forme $]A, +\infty[$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite (H_n) sont dans I. Ce qui prouve que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

On verra lors du chapitre sur le calcul intégral une méthode plus simple pour prouver que la série harmonique diverge vers $+\infty$.

4.5. **Quelques limites de références**

Donnons, sans plus tarder, quelques limites de référence :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

<u>Démontrons quelques uns de ces résultats</u> (hors programme)

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

  Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que l'intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les nombres $\sqrt{n}$ à partir d'un certain rang.

  Comme $A > 0$, on a : $$\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2$$

  Posons $N = E(A^2) + 1$. Ainsi, à partir du rang N, on a $\sqrt{n} \in\ ]A, +\infty[$, ce qui prouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

  Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ (intervalle ouvert centré en 0).

  Montrons que I contient tous les nombres $\dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang.

  Or : $$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

  Posons $N = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. Ainsi, à partir du rang N, on a $\dfrac{1}{n} \in I$, ce qui prouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Les autres résultats se montrent de manière analogue et il n'est pas intéressant de tous les détailler ici.

<u>Précisons plutôt un résultat plus fort</u> :

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}_+$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

En conséquence, on récupère tous les théorèmes sur les règles opératoires sur les limites de fonctions.

Notons que la réciproque du résultat donné ci-dessus est fausse, il se peut que la suite ait une limite (finie ou infinie) sans que la fonction en ait une. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(2n\pi)$ est constante (égale à 1) donc admet bien une limite tandis que la fonction associée $x \mapsto \cos(2x\pi)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemple : étudier la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3n^2 - 2n + 4}{4n^2 + 1}$$

Il s'agit d'un quotient indéterminé avec numérateur et dénominateur qui tendent tous deux vers $+\infty$.

Écrivons : $$u_n = \frac{n^2\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(4 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

Or : $$\lim_{n\to+\infty}\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right) = 4 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(4 + \frac{1}{n^2}\right) = 4$$

D'où, par quotient : $$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2 - 2n + 4}{4n^2 + 1} = \frac{3}{4}$$

On verra justement au paragraphe 5 toutes les règles opératoires sur les limites de suites.

4.6. Remarque : autres cas de divergence

Il existe des suites divergentes qui ne divergent pas vers $+\infty$ (ou $-\infty$). C'est par exemple le cas de :

$$u_n = (-1)^n$$

Preuve :
Supposons, au contraire, que la suite de terme général $(-1)^n$ converge vers un certain réel ℓ.

Soit $I = \left]\ell - \frac{1}{2}\ ;\ \ell + \frac{1}{2}\right[$. I est un intervalle ouvert centré en ℓ.

D'après notre hypothèse, il existe un rang N à partir duquel, on aura :

$$(-1)^n \in I$$

Autrement dit : $$-\frac{1}{2} < (-1)^n - \ell < \frac{1}{2}$$

Or, pour n pair, cela donne : $$\ell \in \left]\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right[$$

Et pour n impair : $$\ell \in \left]-\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right[$$

D'où une contradiction. Donc la suite considérée diverge.

Exercice : démontrer que les suites $(\sin n)$ et $(\cos n)$ divergent.

Nous faisons un raisonnement par l'absurde.

Supposons que la suite $(\cos n)$ converge vers un certain réel $\ell \in [-1, 1]$.

On sait que : $$\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$$

Les suites $(\cos(n+1))$ et $(\cos n \cos 1)$ ont, par hypothèse, une limite.

On en déduit, par différence que la suite $(\sin n \sin 1)$ aussi.

Comme $\sin 1$ est non nul, la suite $(\sin n)$ converge vers un certain réel $k = \dfrac{\ell(\cos 1 - 1)}{\sin 1}$

Ce réel k est non nul car $\cos 1 \neq 1$.

En outre, on sait que : $$\sin(2n) = 2\cos n \sin n$$

En passant à la limite, on aurait : $$k = 2\,\ell\,k$$

Et comme $k \neq 0$: $$\ell = \frac{1}{2}$$

Par ailleurs, on sait que : $$\cos(2n) = \cos^2 n - \sin^2 n$$

En passant à la limite, on aurait : $\ell = \ell^2 - (1 - \ell^2)$

D'où : $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$

$$\ell = 1 \text{ ou } \ell = -\frac{1}{2}$$

D'où une contradiction. Donc les suites ($\cos n$) et ($\sin n$) divergent.

4.7. Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante et majorée de réels converge.

Toute suite décroissante et minorée de réels converge.

Démonstration (hors programme)

Dans le cas d'une suite (u_n) croissante et majorée. (L'autre cas est analogue)

Notons E l'ensemble des valeurs de la suites (u_n) :

$$E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Notons ℓ le plus petit des majorants de E. (Ce réel existe car (u_n) est majorée).

On utilise ici la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ dite de la "borne supérieure" : tout ensemble non vide et majoré admet une borne supérieure (c'est-à-dire un plus petit majorant).

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\ell - \varepsilon$ n'est plus un majorant de E.

Donc il existe un certain rang N tel que : $\ell - \varepsilon < u_N \leqslant \ell$

Mais comme la suite (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant N$, on aura encore :

$$\ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell$$

En conséquence : $u_n \in \,]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

Ce qui prouve la convergence de la suite (u_n).

Applications :

- La suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, pour $n \geqslant 1$ est croissante et majorée (voir plus haut) donc convergente. (Sa limite est difficile à déterminer, elle vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$)
- La suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est croissante et majorée donc convergente. On montrera que sa limite est nombre irrationnel. (Nombre **e** qui sera défini ultérieurement).

5. Règles opératoires sur les limites d'une suite

Soient (a_n) et (b_n) deux suites qui admettent pour limite a et b (a et b sont des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$)

5.1. Cas de la somme : comment déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n)$?

lim b_n / lim a_n	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

5.2. Cas du produit : comment déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n\, b_n)$?

lim b_n / lim a_n	$-\infty$	$b < 0$	0	$b > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$a > 0$	$-\infty$	ab	0	ab	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

5.3. Cas du quotient : comment déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$?

lim b_n / lim a_n	$-\infty$	$b < 0$	0^-	0^+	$b > 0$	$+\infty$
$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$a < 0$	0	$\frac{a}{b}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{a}{b}$	0
0	0	0	?	?	0	0
$a > 0$	0	$\frac{a}{b}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{a}{b}$	0
$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

Les points d'interrogation (?) signalent les cas indéterminés, pour lesquels une étude spécifique doit être menée pour déterminer l'éventuelle limite.

Il faut bien être conscient que tous les résultats de ces tableaux se démontrent. (Tous ne sont d'ailleurs pas évidents). Donnons quelques unes de ces démonstrations :

Limite de la somme de deux suites convergentes égale à la somme des limites :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (a_n) converge vers a, à partir d'un certain rang N_1, on a :

$$a_n \in \left]a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right[$$

Autrement dit : $$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme (b_n) converge vers b, à partir d'un certain rang N_2, on a :

$$b_n \in \left]b - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right[$$

Autrement dit : $$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on aura, à partir du rang $\max(N_1 ; N_2)$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

Autrement dit : $$a_n + b_n \in]a + b - \varepsilon ; a + b + \varepsilon[$$

Ce qui prouve que la suite $(a_n + b_n)$ converge bien vers $a + b$.

<u>Limite du produit de deux suites convergentes égale au produit des limites</u> :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. L'idée est d'écrire : $$a_nb_n - ab = (a_n - a)b_n + (b_n - b)a$$

Comme la suite $(a_n - a)$ converge vers 0 et que la suite (b_n) est bornée (puisque convergente), on en déduit (voir exercice section 4.3) que la suite $((a_n - a)b_n)$ converge vers 0. De même, la suite $((b_n - b)a)$ converge vers 0. Dons la suite (a_nb_n) converge vers ab.

Les autres règles opératoires sur les limites se démontrent aussi. On ne les donne pas toutes ici pour ne pas alourdir l'exposé.

<u>Quelques exemples d'étude de cas indéterminés</u> :

<u>Cas "$\infty - \infty$"</u> :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

On écrit : $$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

D'où (par inverse) : $$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

<u>Cas "$\infty \times 0$"</u> :

$$u_n = n \sin \frac{1}{n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$. D'où une forme indéterminée du type "$\infty \times 0$".

Pour lever l'indétermination, on écrit :

$$u_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Comme on sait que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$[1], on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

[1] Ce résultat peut être démontré par des considérations géométriques. Voir, par exemple, les DM de première S.

Cas "0 / 0" :

$$u_n = \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$$

L'idée est de partir de la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

En conséquence : $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$

Or : $$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{x^2}$$

D'où : $$\frac{(1-\cos x)}{x^2} = \frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \cos x) = 2$, nous en déduisons :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

D'où : $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Cas "∞ / ∞" : un exemple a déjà été donné plus haut (section 4.5.)

5.4. Linéarité de la limite

En combinant les résultats sur la somme et le produit (par un scalaire, c'est-à-dire une constante) pour les **suites convergentes**, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim_{n\to+\infty} u_n + \beta \lim_{n\to+\infty} v_n$$

6. Quelques théorèmes de comparaison et d'encadrement

6.1. Comparaison *Par rapport à une suite divergente*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

pour tout n, $u_n \leqslant v_n$

- Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) aussi.
- Si (v_n) diverge vers $-\infty$ alors (u_n) aussi.

Démonstration

Fixons $A \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que (u_n) diverge vers $+\infty$. Alors, à partir d'un certain rang N, on a :

$$u_n \geqslant A$$

Et comme $v_n \geqslant u_n$, on aura aussi : $v_n \geqslant A$

Donc (v_n) diverge vers $+\infty$.

Le deuxième point se démontre de manière analogue.

Exemple 1 :

Étudier la limite de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = 2\cos n + 3 \times (-1)^n - 3n$$

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \leqslant 5 - 3n$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (5 - 3n) = -\infty$, d'où : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple 2 :

Étudier la limite de la suite (u_n) définie par : $\quad u_n = n^4(\cos n - 2)$

Comme $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, on a : $\quad -3 \leqslant \cos n - 2 \leqslant -1$

Donc : $\quad u_n \leqslant -n^4$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^4) = -\infty$, d'où : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exercice : l'affirmation "une suite qui diverge vers $+\infty$ est nécessairement croissante" est-elle vraie ?

Réponse : non ! Considérer : $\quad u_n = (-1)^n + n$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \geqslant -1 + n$

Donc, par comparaison : $\quad (u_n)$ diverge vers $+\infty$

Cependant (u_n) n'est pas croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + n + 1 - (-1)^n - n = (-1)^{n+1}(1 + 1) + 1 = 2(-1)^{n+1} + 1 = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

6.2. Théorème d'encadrement ou des "gendarmes"

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

- À partir d'un certain rang : $\quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
- (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel ℓ.

Alors (v_n) converge vers ℓ.

Démonstration :

Notons N_0 le rang à partir duquel on a : $\quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

Soit I un intervalle ouvert centré en ℓ. Notons ε son rayon. On a donc $I =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Comme (u_n) converge vers ℓ, à partir d'un certain rang N_1 on a : $u_n \in I$.

Comme (w_n) converge vers ℓ, à partir d'un certain rang N_2 on a : $w_n \in I$.

Pour $n \geqslant \max(N_0, N_1, N_2)$, comme $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, on a alors :

$$v_n \in I$$

Bilan : tout intervalle ouvert I, centré en ℓ, contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang (à savoir $\max(N_0, N_1, N_2)$). Donc la suite (v_n) converge bien vers ℓ.

Exemple 1 : déterminer la limite de la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{3n + 5\times(-1)^n}{2n}$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $$u_n = \frac{3n-5}{2n} \text{ et } w_n = \frac{3n+5}{2n}$$

Les suites (u_n) et (w_n) convergent vers $\frac{3}{2}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

D'après le théorème des gendarmes, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{2}$

Exemple 2 : déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \text{ pour } n \geqslant 1$$

On a : $$n^2 < n^2 + 1$$

En outre, $n^2 + 1 < (n + 1)^2$. (En effet, $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 + 1$ car $2n > 2 > 0$)

On a donc l'encadrement suivant : $$n^2 < n^2 + 1 < (n + 1)^2$$

Par passage à la racine (tous les membres sont positifs), il vient :

$$n < \sqrt{n^2+1} < n + 1$$

Puis en divisant par n (positif) : $$1 < u_n < 1 + \frac{1}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, on en déduit (théorème des gendarmes) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

6.3. Corollaire

Soient (u_n) et (ε_n) deux suites telles que :

- Il existe un réel ℓ tel que pour tout n : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n$
- La suite (ε_n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

Alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration

L'inégalité $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n$ s'écrit encore :

$$\ell - \varepsilon_n \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon_n$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure.

6.4. Théorème *Passage à la limite dans une inégalité*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que pour tout entier n :

$$u_n \leqslant v_n \quad (\text{resp. } u_n < v_n)$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Bien noter que des inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite.

Démonstration

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme : soit (u_n) une suite positive (ou strictement positive) et convergente. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$

Démonstration du lemme :

Notons ℓ la limite de (u_n). Raisonnons par l'absurde. On suppose que $\ell < 0$.

Posons $\varepsilon = -\dfrac{\ell}{2} \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la suite (u_n) converge, on aura à partir d'un certain rang :

$$u_n \in \,]\ell - \varepsilon \,;\, \ell + \varepsilon[$$

En particulier :

$$u_n < \ell + \varepsilon \leqslant \ell - \frac{\ell}{2} \leqslant \frac{\ell}{2} < 0$$

Ce qui contredit la positivité de (u_n). Donc $\ell \geqslant 0$ et le lemme est démontré.

On en déduit le théorème en appliquant le lemme à la suite $(v_n - u_n)$.

6.5. Définition *Suites adjacentes*

Lorsque $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$, on dit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Remarque : la condition "pour tout n, $u_n \leqslant v_n$" est inutile dans les hypothèses. Elle découle des trois autres.

6.6. Théorème *Suites adjacentes*

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ.

De plus, pour tout n :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$$

Démonstration :

Montrons, tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \leqslant v_n$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad w_n = v_n - u_n$

On a : $\quad w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$

Et d'après le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) :

$$w_{n+1} - w_n \leqslant 0$$

Donc (w_n) est décroissante. Ainsi pour tout entier n fixé et tout entier $m \geqslant n$:

$$w_n \geqslant w_m$$

Or, par hypothèse, la suite (w_m) tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$ d'où :

On démontre ci-contre, grâce à un passage à la limite, qu'une suite décroissante et qui converge vers 0 est nécessairement positive.

$$w_n \geqslant 0$$

C'est-à-dire : $u_n \leqslant v_n$

On en déduit encore : $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$

On prouve maintenant la convergence des suites (u_n) et (v_n) grâce au théorème de la limite monotone :

Comme, (u_n) est croissante et majorée par v_0, elle converge vers un certain réel ℓ.

Comme, (v_n) est décroissante et minorée par u_0, elle converge vers un certain réel ℓ'.

En écrivant enfin : $u_n = v_n + (u_n - v_n)$

Un passage à la limite donne : $\ell = \ell' + 0$

$$\ell = \ell'$$

Enfin, on a nécessairement : $u_n \leqslant \ell$

En effet, supposons le contraire : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell < u_{n_0}$

Posons $\ell' = \dfrac{u_{n_0} + \ell}{2}$. ($\ell'$ est la moyenne de u_{n_0} et de ℓ et comme $\ell < u_{n_0}$, on a : $\ell < \ell' < u_{n_0}$).

Comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n \geqslant n_0 \text{ , } \ell' < u_n$

Et par passage à la limite : $\ell' \leqslant \ell$

Ce qui contredit $\ell < \ell'$... Donc on a bien : $u_n \leqslant \ell$

On démontre, de même, que : $\ell \leqslant v_n$

D'où : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$

<u>Remarque</u> : si (u_n) et (v_n) sont strictement monotones, on a même :

$$u_n < u_{n+1} < \ell < v_{n+1} < v_n$$

6.7. Application

1. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ et $y_n = x_n + \dfrac{1}{nn!}$ sont adjacentes.
2. Déterminer sept décimales de leur limite **e**.
3. Démontrer que **e** est un nombre irrationnel.

Remarque : on peut également poser $y_n = x_n + \dfrac{1}{n!}$. Les calculs sont plus simples mais la convergence (vers **e**) plus lente.

<u>Solution</u> :

1. La suite (x_n) est strictement croissante. (Déjà vu plus haut)

   Montrons que (y_n) est strictement décroissante en calculant $y_{n+1} - y_n$:

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - x_n - \frac{1}{nn!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

   Donc (y_n) est strictement décroissante.

Enfin on a : $$y_n - x_n = \frac{1}{nn!}$$

Donc : $$\lim_{n\to+\infty} (y_n - x_n) = 0$$

Les suites (x_n) et (y_n) sont bien adjacentes donc admettent une limite commune (que l'on notera **e**)

2. On a donc, pour tout entier n : $$x_n \leqslant \mathbf{e} \leqslant y_n$$

   Il suffit de déterminer un entier n tel que : $$\frac{1}{nn!} < 10^{-7}$$

   $n = 10$ convient. Donc $\mathbf{e} \simeq x_{10}$ à 10^{-7} près.

   On obtient : $$\mathbf{e} \simeq 2{,}7182818 \text{ (à } 10^{-7} \text{ près)}$$

3. Supposons $\mathbf{e} \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe des entiers p et q tels que $\mathbf{e} = \dfrac{p}{q}$.

   On aurait en particulier : $$x_q < \frac{p}{q} < y_q$$

   En réduisant au même dénominateur la somme $x_q = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{q!}$, on peut écrire :

   $$x_q = \frac{a}{q!} \text{ où } a \in \mathbb{N}$$

   D'où : $$\frac{a}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{a}{q!} + \frac{1}{qq!}$$

   En multipliant par $q!$: $$a < p(q-1)! < a + \frac{1}{q} < a + 1$$

   L'entier $p(q-1)!$ serait compris strictement entre a et $a + 1$ qui sont des entiers consécutifs, ce qui est absurde. Donc $\mathbf{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

7. Étude de la convergence des suites géométriques

7.1. Théorème

Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = a^n$ (avec $a \in \mathbb{R}$)

- Si $a \in]1 ; +\infty[$ alors (u_n) est divergente (vers $+\infty$)
- Si $a = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1)
- Si $a \in]-1 ; 1[$ alors (u_n) est convergente vers 0
- Si $a \in]-\infty ; -1]$ alors (u_n) n'a pas de limite.

Démonstration :

Nous allons utiliser le résultat suivant :

7.2. Lemme *Inégalité de Bernoulli*

Pour tout réel x positif et tout entier naturel n, on a :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Démonstration du lemme :

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On considère la propriété $\wp(n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Remarque : on peut étendre cette inégalité à $x \in]-1, +\infty[$

- On a $\wp(0)$ puisque $(1 + x)^0 \geqslant 1 + 0x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

  Comme $x > 0$, on a aussi $1 + x > 0$. En multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1 + x)$, on obtient :

  $$(1+x)^{n+1} \geqslant (1 + nx)(1 + x)$$

  Or : $(1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + n\,x^2 = 1 + (n + 1)x + n\,x^2$

  Comme $n\,x^2 \geqslant 0$, on a : $(1 + nx)(1 + x) \geqslant 1 + (n + 1)x$

  D'où : $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n + 1)x$

  Ce qui est $\wp(n + 1)$.

  Bilan : on a $\wp(0)$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\wp(n)$

  $$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Prouvons maintenant le théorème 7.1. :

- Supposons $a \in]1 ; +\infty[$. Posons $x = a - 1$. Alors $x \in]0 ; +\infty[$.

  D'après l'inégalité de Bernoulli : $a^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty$. Par comparaison, on en déduit :

  $$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$$

  La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.
- Si $a = 1$, le résultat est évident.
- Supposons maintenant $a \in]-1 ; 1[$.

  Si $a = 0$, le résultat est évident.

  Si $a \neq 0$, posons : $a' = \dfrac{1}{|\,a\,|}$

  Ainsi : $a' \in]1 ; +\infty[$

  D'après le résultat précédent : $\lim\limits_{n\to+\infty} a'^n = +\infty$

  Par passage à l'inverse, nous obtenons : $\lim\limits_{n\to+\infty} |\,a\,|^n = 0$

  D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$

  La suite (u_n) converge donc vers 0.
- Supposons $a \in]-\infty ; -1]$.

  Raisonnons par l'absurde : supposons que la suite (a^n) converge vers un certain entier ℓ.

Soit $I = \left]\frac{\ell}{2} ; \frac{3\ell}{2}\right[$. I est un intervalle ouvert centré en ℓ. D'après notre hypothèse, il existe un rang N à partir duquel, on aura :

$$a^n \in I$$

Autrement dit : $$\frac{\ell}{2} < a^n < \frac{3\ell}{2}$$

Or, si est n pair alors $a^n > 0$, d'où : $$0 < \frac{3\ell}{2}$$

$$0 < \ell$$

Et si n est impair alors $a^n < 0$ d'où : $$\frac{\ell}{2} < 0$$

$$\ell < 0$$

D'où une contradiction. Donc la suite (a^n) diverge.

Exemples :

- Étudier la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = (2 + n)^n$$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $$(2 + n)^n \geqslant 2^n$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ (théorème 7.1.), donc la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

- Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Chaque terme de la suite (u_n) est la somme des $(n + 1)^{\text{èmes}}$ termes d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $P = 1$. On a donc :

$$u_n = \frac{P(1-q^N)}{1-q} = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ (théorème 7.1.) donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$

- Soit $\mathbf{e}$ le nombre vu dans l'application 6.7 et (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{e}^{-k}$.

On a : $$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{e}^{-k} = \frac{1}{\mathbf{e}}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\mathbf{e}}\right)^n}{1-\frac{1}{\mathbf{e}}} = \frac{1-\left(\frac{1}{\mathbf{e}}\right)^n}{\mathbf{e}-1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\mathbf{e}}\right)^n = 0$ (théorème 7.1.) car $0 < \frac{1}{\mathbf{e}} < 1$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{e}^{-k} = \frac{1}{\mathbf{e}-1}$$

7.3. Généralisation : limite de la somme des termes d'une suite géométrique :

Soit $q \in]-1 ; +\infty[$. Alors : $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} q^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } q \geqslant 1 \\ \dfrac{1}{1-q} & \text{si } |q|<1 \end{cases}$$

Pour le démontrer, il suffit d'écrire que lorsque $q \neq 1$: $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} q^p = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ puis d'utiliser le théorème 7.1.

Et pour le cas où $q = 1$, on a alors $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} q^p = n + 1$, somme dont la limite est bien $+\infty$.

Exercice : démontrer que pour tout entier naturel a non nul et tout réel x de $[0 ; 1[$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \left(-x^a\right)^p = \frac{1}{1+x^a}$$

Solution : on a une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-x^a$:

$$\sum_{p=0}^{n} \left(-x^a\right)^p = \frac{1-\left(-x^a\right)^{n+1}}{1+x^a}$$

Or $-x^a \in]-1 ; 1[$ donc : $$\lim_{n\to+\infty} \left(-x^a\right)^{n+1} = 0$$

D'où : $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \left(-x^a\right)^p = \frac{1}{1+x^a}$$

8. Étude des suites arithmético-géométriques (ou récurrentes linéaires d'ordre 1)

Il s'agit des suites récurrentes définies par :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

Objectif : exprimer le terme général u_n de cette suite en fonction de n et étudier sa limite éventuelle.

Pour commencer, traitons quelques cas particuliers :

- si $a = 1$ et $b = 0$, c'est une suite constante, ce qui n'est pas très intéressant.
- si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors la suite (u_n) est arithmétique de raison b. On a donc, pour tout entier naturel n :

  $$u_n = u_0 + bn$$

  la suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de b.
- si $b = 0$ et $a \neq 1$, alors la suite (u_n) est géométrique de raison a. On a donc, pour tout entier naturel n :

  $$u_n = u_0 a^n$$

  et on conclut avec le théorème 7.1. (si $a > 1$, alors la suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de u_0 ; si $a \in]-1 ; 1[$, alors la suite converge vers 0 et si $a \leqslant -1$, elle diverge).
- Et si $a = 0$, la suite (u_n) est stationnaire (à partir du rang 1) égale à b.

Dans ce qui suit, on suppose $\boldsymbol{a \neq 1}$.

L'idée de la démarche qui suit est la suivante : si (u_n) et (w_n) sont deux suites qui vérifient $u_{n+1} = au_n + b$ et $w_{n+1} = aw_n + b$ alors **leur différence v_n est une suite géométrique de raison a**. En effet, pour tout n, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - w_{n+1} = au_n + b - aw_n - b = a(u_n - w_n) = av_n$$

Il suffit donc de chercher une suite (w_n) la plus simple possible vérifiant la relation $w_{n+1} = aw_n + b$. Inutile de chercher bien loin : supposons (w_n) constante. Notons α cette constante. On a alors :

$$\alpha = a\alpha + b$$

Comme $a \neq 1$, il vient : $$\alpha = \frac{b}{1-a}$$

En conséquence, **la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$, où $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$, est géométrique de raison a**.

On en déduit que pour tout n : $$v_n = v_0 a^n = (u_0 - \alpha)a^n$$

D'où : $$\boldsymbol{u_n = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha}$$

Comme, on connaît le comportement asymptotique des suites géométriques (a^n), on en déduit celui de (u_n) :

- Si $u_0 = \alpha$ alors (u_n) est constante égale à α.
- Si ($a \in]-1 ; 1[$ et $u_0 \neq \alpha$), alors (u_n) converge vers α.
- Si ($a > 1$ et $u_0 \neq \alpha$), alors (u_n) diverge vers $+\infty$ (si $u_0 > \alpha$) ou $-\infty$ (si $u_0 < \alpha$).
- Si ($a \leqslant -1$ et $u_0 \neq \alpha$), alors (u_n) diverge.

<u>Exemple de mise en oeuvre</u> :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n.

On cherche α tel que : $$\alpha = 2\alpha - 3$$
$$\alpha = 3$$

On a ainsi : $$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3 \\ \alpha = 2\alpha - 3 \end{cases}$$

En retranchant membre à membre : $$u_{n+1} - \alpha = 2(u_n - \alpha)$$

La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est donc géométrique de raison $q = 2$; son terme initial est $v_0 = u_0 - \alpha = 2$.

On a donc, pour tout entier n : $$v_n = q^n v_0 = 2^{n+1}$$

Et finalement : $$u_n = v_n + \alpha = 2^{n+1} + 3$$

(On pouvait aussi démontrer ce résultat par récurrence après l'avoir conjecturé)